Analyse mathématique I (A)

Examen (1er septembre 2014)

Nom :

Prénom :

Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez, si elle existe, la limite au sens large de chacune des suites suivantes. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez. /10

- $u_n = \dfrac{\sin(n^2)}{n}$
- $w_n = 1 + \dfrac{2^n \mathrm{e}^{-n}}{(-1)^n}$
- $y_n = \dfrac{1 + (-1)^n \sqrt{1+n^4}}{1 - (-1)^{n+3} n^2}$
- $v_n = \dfrac{n+2}{n^2} \pi^n$
- $x_n = \left(2 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2.

/7

(a) Soient une suite $(x_n)_{n \in I} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Complétez par une formule quantifiée (afin que l'équivalence soit vraie) :

$$(x_n)_{n \in I} \text{ converge vers } a \;\Leftrightarrow\; \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \tag{1}$$

(b) En utilisant la définition donnée en (a), montrez que $\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \to 1$. La qualité de votre rédaction est importante.

(c) La définition que vous avez donnée en (a) est-elle équivalente à

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists n_0' \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0', \quad a - \frac{\varepsilon'}{n} < x_n < a + \frac{\varepsilon'}{n}. \tag{2}$$

Plus précisément, déterminez si (1) $\Rightarrow$ (2) et si (2) $\Rightarrow$ (1). Donnez une preuve ou un contre-exemple pour étayer vos affirmations.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Soit $x_0 \in]0,1]$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ commençant à x_0 par la récurrence

/5

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{x_n^2}{4}.$$

(a) Déterminez si la suite (x_n) est croissante et/ou décroissante.

(b) Dites si la suite (x_n) converge au sens large en discutant au besoin en fonction de x_0.

(c) Si (x_n) converge, donnez la valeur de sa limite. Si non, donnez la limite d'une sous-suite de votre choix.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. /5

(a) Soient $(x_n)_{n\in I}$ et $(y_n)_{n\in J}$ deux suites de nombres réels. Définissez « $(y_n)_{n\in J}$ est une sous-suite de $(x_n)_{n\in I}$ ».

(b) Montrez que $(x_n)_{n\in I}$ est une suite non bornée si et seulement s'il existe une sous-suite $(y_n)_{n\in J}$ de $(x_n)_{n\in I}$ telle que $|y_n| \to +\infty$.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. /6

(a) Définissez « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy ».

(b) Définissez « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ».

(c) Montrez, à partir des définitions que vous venez de donner, que toute suite de Cauchy est bornée.

(d) En utilisant (a)–(c), montrez que, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de Cauchy, alors $(x_ny_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (1er septembre 2014)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. /8

(a) Définissez « a est l'infimum de A ».

(b) Soient $A \subseteq \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ un ensemble non vide et $a \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in A, \frac{1}{2}(a+x) \in A$. Montrez que a est l'infimum de A.

(c) Calculez, quand ils existent, l'infimum et le minimum des ensembles suivants. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez.

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{x-3}} \right\} \quad \text{et} \quad B := \left\{ n + \frac{4}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6 (suite).

(c) Poursuivez votre réponse sur cette page.

(d) Soit $c \in \mathbb{R}$. On définit l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant c\}$. Calculez, s'ils existent, $\inf E$ et $\min E$ en discutant en fonction de c si nécessaire.