Analyse mathématique I(A)

Examen (5 janvier 2015)

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par une preuve ou un contre-exemple. /10

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ou décroissante.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels strictement positifs converge vers 0, alors $(1/x_n)$ converge vers $+\infty$.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, alors aucune de ses sous-suites ne converge.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel alors (x_n) est bornée inférieurement.

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \,]0,+\infty[$ est croissante, alors $(1/x_n)$ est décroissante.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (5 janvier 2015)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 2. Calculez, si elle existe, la limite au sens large de chacune des suites suivantes. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez. /10

- $x_n = \dfrac{2\sin(n^2) + \pi n^2}{n^3 + 5n^2 + 1}$
- $z_n = \dfrac{-2\,(n+1)!}{5^n + 2^n + 3^n}$
- $v_n = \dfrac{(-1)^{n/3}\, n^4 + 1}{n^3 + 5}$
- $y_n = \dfrac{2^n\, \mathrm{e}^n}{\pi + \cos(n^2+1)}$
- $u_n = \dfrac{(-1)^n \sqrt{n^2+n}}{3 - (-1)^{n+2}\, n}$

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 3.

/7

(a) Soient une suite $(x_n)_{n\in I} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « $(x_n)_{n\in I}$ converge vers a ».

(b) En utilisant la définition donnée en (a), montrez que $\dfrac{7n+1}{8n-2} \to \dfrac{7}{8}$. La qualité de votre rédaction est importante.

(c) Montrez que la définition que vous avez donnée en (a) est équivalente à

$$\forall \varepsilon' \geqslant 1,\ \exists n'_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n'_0,\ |x_n - a| \leqslant \frac{1}{\varepsilon'}. \tag{1}$$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 4. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la récurrence /8

$$\begin{cases} x_0 = 1, \\ x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}. \end{cases}$$

Montrez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donnez la valeur de sa limite. Justifiez les différentes étapes de votre raisonnement.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

/6

Question 5. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_n = \left(\frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}\right)^n,$$

où α est un paramètre réel. Étudiez la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de α. Lorsque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donnez la valeur de sa limite. Justifiez votre réponse et énoncez les résultats que vous utilisez.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (5 janvier 2015)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 6. /9

(a) Soient A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non-vide borné supérieurement et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « a est le suprémum de A ».

(b) Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ non-vides bornés supérieurement. Montrez que

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

(c) Calculez, quand ils existent, le suprémum, l'infimum, le maximum et le minimum des ensembles suivants. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez.

$$A := \left\{\cos\left(\pi + \frac{1}{n}\right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_0\right\} \qquad B := \left\{(-1)^n + 3^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 6 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.