Analyse mathématique I (B)

Examen (23 avril 2015)

Nom :

Prénom :

Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Soit l'application $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x} + x$. En utilisant la définition en ε-δ, montrez que f est continue sur son domaine de définition. La qualité de votre rédaction est importante. /4

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. Déterminez l'ensemble des solutions *réelles* de l'équation :

/4

$$\partial_t^2 u(t) + 16u(t) = \sin(4t) + \mathrm{e}^{2t}\,.$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

/5

Question 3. Calculez le développement de Taylor d'ordre 4 en $x = 0$ avec un reste exprimé en terme de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \cosh\left(\mathrm{e}^{\frac{\cos(x)-1}{1+x^2}} - 1\right).$$

Expliquez et justifiez les calculs que vous effectuez. En déduire la valeur de la limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-1}{x^4}$.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (23 avril 2015)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. On considère l'application $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par /8

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda\, \mathrm{e}^x + 1 & \text{si } x < 0, \\ 3x^2 - \lambda & \text{si } x \in [0,1[, \\ \dfrac{19}{2} - \dfrac{6}{\mathrm{e}^{x-1}} & \text{si } x \geqslant 1, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(a) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f_λ est continue sur son domaine de définition. Ceci implique que, pour les valeurs de λ données, la continuité de f doit être établie.

(b) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f_λ est dérivable sur son domaine de définition.

(c) Pour chaque λ donné en (a), donnez tous les points en lesquels f_λ est dérivable ainsi que la valeur de la dérivée en ces points.

Justifiez en *détail* toutes vos affirmations. Les résultats du cours utilisés doivent être clairement identifiés.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. Soit l'équation $\mathrm{e}^{-x} - \lambda x = \sqrt{x}$, où λ est un paramètre réel. Montrez rigoureusement que cette équation possède une unique solution dans $]0, +\infty[$ quel que soit $\lambda \in]0, +\infty[$. Expliquez votre démarche, détaillez vos calculs et énoncez les résultats utilisés. /4

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue, dérivable et telle que $f(0) = -1$, $f(1) = 1$ et $\partial f(1) = -1$. /5

(a) Montrez qu'il existe $x_0 \in \,]0,1[$ tel que $f(x_0) = 1$.

(b) Montrez qu'il existe $x_1 \in \,]0,1[$ tel que $\partial f(x_1) = 0$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse par un bref argument ou un contre-exemple explicite.

/6

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $\forall x \in \mathbb{R},\ \partial f(x) > 0$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors f est ultimement croissante.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ La fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $u(t) = 0$ si $t \leqslant 0$ et $u(t) = -1/t$ si $t > 0$ est solution de l'équation différentielle $\partial_t u = u^2$.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (23 avril 2015)

Nom :
Prénom :
Section :

/5

Question 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. On rappelle que « f possède une asymptote horizontale en $+\infty$ » si et seulement si $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe (au sens strict).

(a) Peut-on dire que si $\partial f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, alors f possède une asymptote horizontale en $+\infty$? Justifiez votre réponse par une preuve ou un contre-exemple.

(b) Prouvez que si f possède une asymptote horizontale en $+\infty$ et si $\partial f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$, alors $\ell = 0$.
INDICATION : examinez $f(x+1) - f(x)$.