Analyse mathématique I (B)

Examen

(26 mai 2015)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Déterminez l'ensemble des solutions réelles de l'équation : /4

$$\partial_t^2 u(t) - 11\partial_t u(t) + 18u(t) = t^2\,\mathrm{e}^{2t}\,.$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

/5

Question 2. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ avec un reste exprimé en terme de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{1+\sin(x)}\right)^2.$$

Expliquez et justifiez les calculs que vous effectuez. En déduire la valeur la limite $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{\sin(x)}$.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

/8

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, \mathrm{e}^{x+1} - 1 & \text{si } x < -1, \\ \lambda x + 1 & \text{si } x \in [-1, 1], \\ -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\lambda & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(a) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est continue sur son domaine de définition. Ceci implique que, pour les valeurs de λ données, la continuité de f doit être établie.

(b) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est dérivable sur son domaine de définition.

Justifiez en *détail* toutes vos affirmations.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (26 mai 2015)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

/4

Question 4. Soit l'équation $\cosh(\lambda x) = -\lambda x + 2$, où λ est un paramètre réel. Montrez rigoureusement que cette équation possède une unique solution dans $]0, +\infty[$ quel que soit $\lambda \in]0, +\infty[$. Expliquez votre démarche, détaillez vos calculs et énoncez les résultats utilisés.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (26 mai 2015)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Soit l'application

/4

$$f(x) = \begin{cases} 7x^2+2 & \text{si } x \geqslant 0, \\ |x|+2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

En utilisant la définition en ε-δ, montrez que f est continue sur son domaine de définition.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue. Supposons que f soit deux fois dérivable et que $\partial^2 f > 0$ sur $]a, b[$. Montrez que f possède un unique minimum sur $[a, b]$. $/4$

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (26 mai 2015)

Nom :

Prénom :

Section :

/6

Question 7. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse par un bref argument ou un contre-exemple explicite.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in \mathbb{R}$ si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $f(x) = o(x^n)$ et $g(x) = o(x^m)$ lorsque $x \to 0$. Alors $f(x) \cdot g(x) = o(x^{\min\{n,m\}})$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x > 0,\ f(x) > 0$. Alors il existe un $r > 0$ tel que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]0, r[$.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (26 mai 2015)

Nom :

Prénom :

Section :

/5

Question 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable (mais pas forcément de classe $\mathscr{C}^1$).

(a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de racines de f et $x^* \in \mathbb{R}$ tels que $x_n \to x^*$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \neq x^*$. Montrez que $f(x^*) = 0$ et $\partial f(x^*) = 0$.

(b) Supposons que $x^* \in \mathbb{R}$ vérifie $f(x^*) = 0$ et $\partial f(x^*) \neq 0$. Montrez alors que x^* est une racine *isolée* dans le sens où $\exists r > 0,\ \forall x \in [x^* - r, x^* + r] \setminus \{x^*\},\ f(x) \neq 0$.

(c) Supposons que f satisfasse $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 \Rightarrow \partial f(x) \neq 0$. Montrez que f possède au plus un nombre fini de racines dans $[0,1]$.