Analyse mathématique I (A)

Examen (29 mai 2015)

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par une preuve ou un contre-exemple. /10

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Si a est le plus grand des termes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ou décroissante.

Nom : ______________
Prénom : ______________
Section : Mathématique

Question 1 (suite).

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Si le suprémum de A existe alors le maximum de A existe et vaut son suprémum.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et a un réel. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs et converge vers a, alors a est strictement positif.

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée supérieurement alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens large.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 2. Calculez, si elle existe, la limite au sens large de chacune des suites suivantes. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez.

/8

- $x_n = \dfrac{(-1)^n\, n^2 + (n-2)^3}{n^2}$
- $y_n = \dfrac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n^2} + n^3}{n^3 + 2}$
- $z_n = \dfrac{\big(\cos(n+2) + \sin(n^2)\big)^2 (-1)^n}{n^2 + 5}$
- $u_n = \dfrac{-5n^2}{\cos(n) + 2} + \dfrac{2\cos(n)}{5n^2}$

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 3. /7

(a) Soient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a ».

(b) En utilisant la définition donnée en (a), montrez que $\dfrac{\mathrm{e}^{\cos(n)+1}}{n+5} \to 0$. La qualité de votre rédaction est importante.

(c) La définition que vous avez donnée en (a) est-elle équivalente à

$$\forall k \in \mathbb{N}_0,\ \exists n_0' \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0',\ |x_n - a| \leqslant k\,? \tag{1}$$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (29 mai 2015)

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 4. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

/6

$$x_n = \frac{n^p + p + 2n^{2p}}{n+p},$$

où p est un paramètre réel. Étudiez la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de p. Lorsque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donnez la valeur de sa limite. Justifiez votre réponse et énoncez les résultats que vous utilisez.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (29 mai 2015)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 5. /9

(a) Soient A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non-vide borné inférieurement et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « a est l'infimum de A ».

(b) Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ non-vides bornés inférieurement. Montrez que

$$\big(\forall a \in A,\ \exists b \in B,\ b \leqslant a\big) \ \Rightarrow\ \inf A \geqslant \inf B.$$

(c) Calculez, quand ils existent, le suprémum, l'infimum, le maximum et le minimum des ensembles suivants. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez.

$$A := \big\{2 + 5^n \bigm| n \in \mathbb{N}\big\}, \qquad B := \left\{\frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{n} \Bigm| n \in \mathbb{N}_0\right\}, \qquad C := \left\{2 + \cos\Big(\frac{1}{n}\Big) \Bigm| n \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 6. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la récurrence /5

$$\begin{cases} x_0 \in [0,1], \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n(x_n^2 - 3x_n + 4). \end{cases}$$

Montrez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donnez la valeur de sa limite. Justifiez les différentes étapes de votre raisonnement.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 6 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.