Analyse mathématique I(A)

Examen (31 août 2015)

Nom :	
Prénom :	
Section : Mathématique	

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez, si elle existe, la limite au sens large de chacune des suites suivantes. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez. /8

- $x_n = \dfrac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$
- $y_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$
- $z_n = \dfrac{2n\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right)}{5n\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{5n}\right)}$
- $u_n = \dfrac{n^3\left(1 + \frac{5}{n^2}\right)}{4n^2\left(1 + \frac{\sin n}{4n^2} + \frac{\ln n}{4n^2}\right)}$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 2. /7

(a) Soient une suite $(x_n)_{n\in I} \subseteq \mathbb{R}$. Définissez « $(x_n)_{n\in I}$ converge vers $+\infty$ ».

(b) En utilisant la définition donnée en (a), montrez que $\dfrac{5n^3 + \cos\sqrt{n}}{n^2} \to +\infty$. La qualité de votre rédaction est importante.

(c) La définition que vous avez donnée en (a) est-elle équivalente à

$$\forall R' < 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_1,\ x_n > R' \ ? \tag{1}$$

Justifiez votre réponse par une preuve ou un contre-exemple.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

/8

Question 3. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par une preuve ou un contre-exemple.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si un sous-ensemble non-vide A de $\mathbb{R}$ est borné inférieurement alors $\inf A \in A$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Si deux suites de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant a \text{ et } v_n \leqslant b, \quad \text{et} \quad u_n + v_n \to a + b,$$

alors $u_n \to a$ et $v_n \to b$.

Question 3 (suite).

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si une suite de nombres réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $|x_n - x_{n+1}| \to 0$.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 4.

/7

(a) Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « a est le maximum de A ».

(b) Soient A un sous-ensemble non-vide et borné de $\mathbb{R}$. En partant du fait que le suprémum de A est le minimum des majorants de A, montrez que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ \sup A < a + \varepsilon.$$

(c) Calculez le suprémum et l'infimum des ensembles suivants. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez.

$$A := \left\{ \frac{1}{\ln(1-x^2)} \,\middle|\, x \in \left]-1,1\right[,\ x \neq 0 \right\}, \qquad B := \left\{ 2^{-n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

/10

Question 5. Soient a et b deux réels strictement positifs.

(a) Montrez que $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.

(b) En supposant que $a \leqslant b$, montrez que $a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b$ et $a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b$.

(c) Soient u_0 et v_0 deux réels strictement positifs tels que $u_0 < v_0$. On définit les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \\ v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}. \end{cases}$$

(i) Montrez que $u_n \leqslant v_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Montrez que (v_n) est une suite décroissante.

(iii) Montrez que (u_n) est une suite croissante.

(iv) Déduisez que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et montrez que leur limite est la même. On note cette valeur $\operatorname{agm}(u_0, v_0)$.

(v) Montrez que $u_0 < \operatorname{agm}(u_0, v_0) < v_0$.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.