Analyse mathématique I (B)

Examen

(2 septembre 2015)

Nom :

Prénom :

Section :

- Veuillez commencer par écrire en lettres majuscules vos NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justifications dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Déterminez l'ensemble des solutions réelles de l'équation : $/5$

$$\partial_t^2 u(t) + 2\partial_t u(t) - 15u(t) = \mathrm{e}^{5t} + \cos(3t).$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

/5

Question 2. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ avec un reste exprimé en terme de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \left[\exp\left(\frac{\sin(x^2)}{1+\sin(x)}\right)\right]^2.$$

Expliquez et justifiez vos calculs. Déduisez-en la valeur de la limite $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{\cos(x)-1}$.

Nom :
Prénom :
Section :

/8

Question 3. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda(\cos(x)-1) & \text{si } x < 0 \\ e^{x^2}-1 & \text{si } x \in [0,1] \\ -\lambda(x-1)(x-4)+e-1 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(a) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est continue sur son domaine de définition. Ceci implique que, pour les valeurs de λ données, la continuité de f doit être établie.

(b) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est dérivable sur son domaine de définition.

Justifiez en *détail* toutes vos affirmations.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4. Soit l'équation $\sinh(x) = -\lambda x^2 + 1$, où λ est un paramètre réel. Montrez rigoureusement que cette équation possède une unique solution dans $]0, +\infty[$ quel que soit $\lambda \geqslant 0$. Expliquez votre démarche, détaillez vos calculs et énoncez les résultats utilisés.

/4

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} |x| + x & \text{si } x \leqslant 1, \\ 2\sqrt{x} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

/4

En utilisant la définition en ε-δ, montrez que f est continue sur son domaine de définition.

Nom :
Prénom :
Section :

$/4$

Question 6. Soient $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Montrez que f est de Lipschitz, c'est-à-dire qu'il existe $K \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ tel que pour tout $x,y \in [a,b]$, $|f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|$.