Analyse mathématique I(A)

Examen (18 janvier 2016)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez, si elle existe, la limite au sens large de chacune des suites suivantes. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez. /10

- $x_n = \dfrac{5^n}{3^{n+1}} \cdot \dfrac{2n^3+5n}{4n^2+2}$
- $y_n = \dfrac{-2n^5 - \cos(n)n^3}{\pi + 4n^3}$
- $z_n = \dfrac{\sin^2(n)}{5} \cdot \dfrac{\cos(n)+1}{n^2} \cdot \dfrac{4+n}{n^3}$
- $u_n = \dfrac{(-1)^n n^{10} + \frac{\sin(n)}{2^n}}{100n^5 + 10n^4 + n^3 + 1}$
- $w_n = \dfrac{(-1)^{n+1} + \sqrt{4n^2} + 2n}{(-1)^n n^3 + \sqrt{n^5} + n^{7/2}}$

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (18 janvier 2016)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 2. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par une preuve ou un contre-exemple.

/10

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe une suite (x_n) qui n'est ni croissante, ni décroissante et qui converge vers un réel.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe une suite (x_n) qui ne converge pas mais dont la sous-suite (x_{2n}) converge vers $+\infty$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe une suite (x_n) qui converge vers π et qui est bornée par 3.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 2 (suite).

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n < z_n$ et qui convergent toutes les deux vers le réel a. Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n < x_n < z_n$ et (x_n) converge.

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe une suite (x_n) strictement décroissante et dont tous les termes sont négatifs qui converge vers -1.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 3. Calculez, quand ils existent, le suprémum, l'infimum, le maximum et le minimum des ensembles suivants. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez. /4

$$A := \left\{ \sin\left(2 + \frac{1}{n}\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}_0 \right\} \qquad B := \left\{ \frac{6n+5}{3n+2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 4. /7

(a) Soient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a ».

(b) En utilisant la définition donnée en (a), montrez que $\dfrac{3\cdot 2^n}{5^n} \to 0$. La qualité de votre rédaction est importante.

(c) La définition que vous avez donnée en (a) est-elle équivalente à

$$\forall k \in \,]0,1],\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_1,\ |x_n - a| \leqslant k\,? \tag{1}$$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

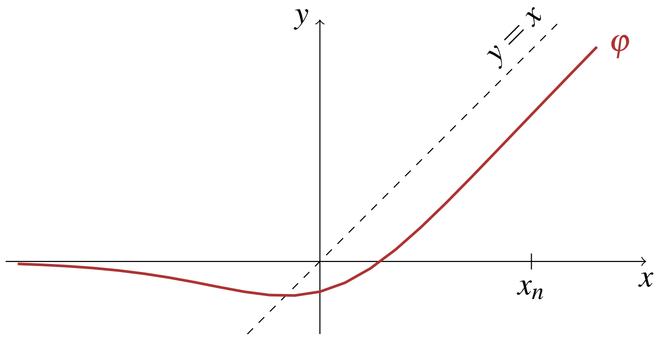
Section : Mathématique

/10

Question 5. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence :

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \qquad \text{où } \varphi(x) := \frac{e^x(x-1)}{e^x+1}.$$

(a) En utilisant une construction géométrique (à expliquer), dessinez sur le graphique ci-contre les trois itérées x_{n+1}, x_{n+2} et x_{n+3}.



On considère l'ensemble $A := \{x \mid e^x + x \geqslant 0\}$ et on pose $a := \inf A$.

(b) Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \leqslant x \Leftrightarrow x \in A$.

(c) Prouvez que $\varphi(a) = a$.

(d) Représentez A et a sur le graphique ci-dessus. Déduisez en graphiquement que $A = [a, +\infty[$.

(e) Grâce à un calcul de dérivée, prouvez que φ est strictement croissante sur A.

(f) Si $x_0 \in A$, a-t-on que $x_1 \in A$? A-t-on dès lors que $x_n \in A$? Justifiez votre réponse.

(g) Montrez que, si $x_0 \in A$, la suite (x_n) converge et caractérisez sa limite.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.