Analyse mathématique I (B)

Examen (23 avril 2016)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Déterminez l'ensemble des solutions réelles de l'équation : /5

$$\partial_t^2 u(t) + 4\partial_t u(t) - 5u(t) = \cos(t) + \mathrm{e}^{2t} .$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ avec un reste exprimé en terme de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $/5$

$$f(x) = \sinh\left(\frac{x\mathrm{e}^x}{1+\sin^2(x)}\right).$$

Expliquez et justifiez les calculs que vous effectuez. En déduire la valeur de la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\cos(x)+x-1}.$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3. Soit l'équation $2-\cosh(\lambda x)=\ln(1+x)+x$, où λ est un paramètre réel. Montrez rigoureusement que cette équation possède une unique solution dans $]0,+\infty[$ quel que soit $\lambda \in\ ]0,+\infty[$. Expliquez votre démarche, détaillez vos calculs et énoncez les résultats utilisés. /5

Nom :
Prénom :
Section :

/7

Question 4. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) + \lambda^2 & \text{si } x < 0, \\ \lambda\, \mathrm{e}^x & \text{si } x \in [0,1[, \\ \lambda\, \mathrm{e}^{x^2}(2-x) & \text{si } x \geqslant 1, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(a) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est continue sur son domaine de définition. Ceci implique que, pour les valeurs de λ données, la continuité de f doit être établie.

(b) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est dérivable sur son domaine de définition.

Justifiez en *détail* toutes vos affirmations.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. Soit l'application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x} + x^2$. En utilisant la définition en ε-δ, montrez que f est continue sur son domaine de définition. /4

Nom :	
Prénom :	
Section :	

/6

Question 6. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse par un bref argument ou un contre-exemple explicite.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application et $c \in \,]a,b[$. Supposons que $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ >}} f(x)$ existent. On a que f est discontinue en c si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ <}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to c \\ >}} f(x)$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application. Si f est dérivable sur $]a,b[$ alors la dérivée de f est continue sur $]a,b[$.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (23 avril 2016)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6 (suite).

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit P un polynome réel à une variable et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ une application. L'ensemble des solutions de $P(\partial_x)u = f$ est soit vide, soit le translaté d'un sous-espace vectoriel.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ qui sont toutes les deux des $\mathrm{o}(x-a)$ lorsque $x \to a$. On suppose de plus que $\forall x \in \operatorname{Dom} g \setminus \{a\},\ g(x) \neq 0$. Alors $f(x)/g(x) = \mathrm{o}(1)$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7.

/4

(a) Énoncez le théorème de la moyenne.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable deux fois. Supposons que f ait trois racines *distinctes*. Montrez qu'il existe $x^* \in \mathbb{R}$ tel que $\partial^2 f(x^*) = 0$.