Analyse mathématique I (A)

Examen (23 mai 2016)

Nom : ______________

Prénom : ______________

Section : Mathématique

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez, si elle existe, la limite au sens large de chacune des suites suivantes. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez. /10

- $x_n = \dfrac{\cos(4n^2)+n^2}{n^3+5}$
- $y_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)^3+2}{3+5n^2}$
- $z_n = \dfrac{-2^n}{2+\sin(3n^2)}$
- $w_n = \dfrac{(-5)^{2n}\,n^2}{1+n^2+5n}$
- $s_n = \dfrac{5+10n+25n^2+10n^3}{2n^3+5n+2}$

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (23 mai 2016)

Nom :	
Prénom :	
Section : Mathématique	

/10

Question 2. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par une preuve ou un contre-exemple (un « vu au cours » ne suffit pas).

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n > y_n$, $x_n \to a$, $y_n \to b$ où a et b sont des réels et telles que $a \leqslant b$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient $(x_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ des sous-suites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $(x_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un réel a alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Toute suite qui converge au sens large est bornée.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 2 (suite).

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée supérieurement, alors elle possède une sous-suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x'_n \to +\infty$.

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel non nul c. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$ alors $(cx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 3. Calculez, quand ils existent, le suprémum, l'infimum, le maximum et le minimum des ensembles suivants. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez. /4

$$A := \left\{ \frac{5n^2+3}{7n^2+2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \qquad B := \left\{ x \in \mathbb{N} \;\middle|\; \sqrt{2^x} \in \mathbb{N} \right\}$$

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 4.

/7

(a) Soient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a ».

(b) En utilisant la définition donnée en (a), montrez que $\dfrac{\cos(\sqrt{n}) + 5n^4}{n^4 + 7n^2 + 9} \to 5$. La qualité de votre rédaction est importante.

(c) La définition que vous avez donnée en (a) est-elle équivalente à

$$\forall k \in \,]0, +\infty[,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N, \quad a - \frac{k}{2} < x_n \leqslant a + \frac{3k}{2}\ ? \tag{1}$$

Justifiez votre réponse.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

/8

Question 5. Soit $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ la suite définie par la récurrence :

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{x_n+1}{2}}. \end{cases} \tag{2}$$

(a) Montrez que pour tout naturel n, $x_n \in \,]0,1[$.

(b) La suite (x_n) converge-t-elle ? Si oui, déterminez sa limite.

(c) La conclusion (b) aurait-elle été la même si dans (2), on était parti de $x_0 \in [0,+\infty[$ au lieu de $x_0 = \sqrt{2}/2$? Justifiez.