Analyse mathématique I (B)

Examen (30 mai 2016)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Déterminez l'ensemble des solutions réelles de l'équation : /5

$$\partial_t^2 u(t) - 9\partial_t u(t) - 22u(t) = \sin(t).$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ avec un reste exprimé en terme de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : /5

$$f(x) = \exp\left(\frac{\sin^2(x)}{1 - \sin(x^2)}\right).$$

Expliquez et justifiez les calculs que vous effectuez. Déduisez-en la valeur de la limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{\cosh(x) - 1}.$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Soit l'équation $\sinh(\lambda x) = \sqrt{x+2} - e^x$, où λ est un paramètre réel. Montrez rigoureusement que cette équation possède une unique solution dans $]0, +\infty[$ quel que soit $\lambda \in [0, +\infty[$. Expliquez votre démarche, détaillez vos calculs et énoncez les résultats utilisés. /5

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

/7

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \in [0,1] \\ \lambda \sin(\lambda(x-1)) + 2 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(a) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est continue sur son domaine de définition. Ceci implique que, pour les valeurs de λ données, la continuité de f doit être établie.

(b) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est dérivable sur son domaine de définition.

Justifiez en *détail* toutes vos affirmations.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (30 mai 2016)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x) + x$. En utilisant la définition en ε-δ, montrez que f est continue sur son domaine de définition. /4

INDICATION : pour tout $p, q \in \mathbb{R}$, $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse par un bref argument ou un contre-exemple explicite. /6

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{Dom}(f)$. Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que $[a-r, a+r] \cap \mathrm{Dom}(f) = \{a\}$. Alors f est continue en a.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{Dom}(f)$. Supposons qu'il existe $r, r' > 0$ tels que les limites $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in [a-r, a[}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in]a, a+r']}} f(x)$ existent et sont égales. Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7.

/5

(a) Énoncez le théorème de la moyenne.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et continue en 0. Montrez que si $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \partial f(x)$ existe, alors f est dérivable en 0 et $\partial f(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \partial f(x)$.

(c) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La fonction g est-elle dérivable en 0 ? Est-ce une contradiction avec le point précédent ?

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7 (suite). Si nécessaire, poursuivez votre réponse sur cette page.