Analyse mathématique I (B)

Examen

(24 août 2016)

Nom :

Prénom :

Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Déterminez l'ensemble des solutions réelles de l'équation : /5

$$2\partial_t^2 u(t) - 5\partial_t u(t) + 2u(t) = \sin(t/2) + t.$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (24 août 2016)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ avec un reste exprimé en terme de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : /5

$$f(x) = \sin\left(\frac{x^2}{1+\sin(x)}\right).$$

Expliquez et justifiez les calculs que vous effectuez. En déduire la valeur de la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{\cos(x^2)-x}.$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

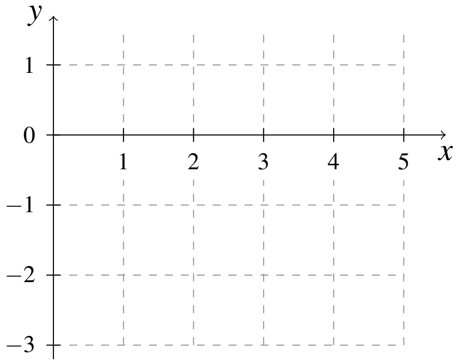
Nom :
Prénom :
Section :

/5

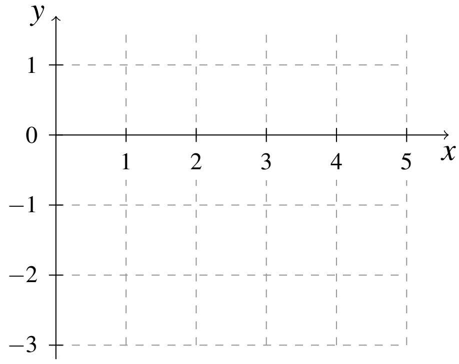
Question 3. Soit l'équation $\cos(\mathrm{e}^{-\lambda x}) = x^3 - \lambda$, où λ est un paramètre réel.

(a) Esquissez le graphe des deux membres de l'équation en fonction de x pour les valeurs de λ indiquées.

$\lambda = 0$



$\lambda = 1$



(b) Montrez rigoureusement que cette équation possède une unique solution dans $]0,+\infty[$ quel que soit $\lambda \in [0,+\infty[$. Expliquez votre démarche, détaillez vos calculs et énoncez les résultats utilisés.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

/7

Question 4. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \sin(x) & \text{si } x \leqslant -\pi, \\ e^{\lambda(x+\pi)} - \lambda^2 & \text{si } x \in \,]-\pi, 2], \\ x^2 + \lambda x + 1 & \text{si } x > 2, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(a) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est continue sur $]-\infty, -\pi[$.

(b) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est continue en 0.

(c) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est continue en $-\pi$.

(d) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est dérivable en $-\pi$.

Justifiez en *détail* toutes vos affirmations.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (24 août 2016)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$. En utilisant la définition en ε-δ, montrez que f est continue sur son domaine de définition.
INDICATION : pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$. /4

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse par un bref argument ou un contre-exemple explicite.

/6

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ et T la tangente au graphe de f en a. Notons $G_V(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in V\}$ le graphe de f restreint à V, où $V \subseteq \mathbb{R}$. Il existe un voisinage V de a tel que $G_V(f) \cap T = \{(a, f(a))\}$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ L'équation différentielle $\partial_t^2 u(t) - 2016\,\partial_t u(t) + u(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{i}t}$ a une solution réelle, où $\mathbf{i}^2 = -1$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications. Si f est croissante et g strictement décroissante, alors $f \circ g$ est décroissante.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (24 août 2016)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\partial^n f(x) = 0$. Montrez que f est une fonction polynomiale. /4