Analyse mathématique I(A)

Examen (26 août 2016)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par une preuve ou un contre-exemple. /10

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Une suite convergente est nécessairement monotone à partir d'un certain rang.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 1 (suite).

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Une suite convergente vers $+\infty$ est nécessairement croissante à partir d'un certain rang.

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n \geqslant x_n$ alors $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(f) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels. Si $\big(|x_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (26 août 2016)

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 2. Calculez, si elle existe, la limite au sens large de chacune des suites suivantes. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez.

/10

(a) $x_n = \dfrac{n^2 \cdot \cos(n)^2 + n^3 \cdot \sin(n^2) + n^4}{2n+1}$

(b) $y_n = \dfrac{-2n^2 + 5}{n^2 + \cos(3n) + 2}$

(c) $z_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n - n^2}{4n+1}$

(d) $u_n = \dfrac{3^n}{\cos(n) + 2}$

(e) $w_n = \dfrac{4n^3 + 4}{(-1)^n \cdot n + 4}$

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 3. Calculez, quand ils existent, le suprémum, l'infimum, le maximum et le minimum des ensembles suivants. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez. /4

$$A := \left\{ n^2 + 3n + 2 \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \qquad B := \left\{ \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (26 août 2016)

Nom : ___________

Prénom : ___________

Section : Mathématique

Question 4.

/9

(a) Soient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a ».

(b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Donnez la définition de « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-\infty$ ».

(c) En utilisant la définition donnée en (a), montrez que $\dfrac{4n+5\cos(n)}{2n+2} \to 2$. La qualité de votre rédaction est importante.

(d) En utilisant la définition donnée en (b), montrez que $-\dfrac{4^n}{3} \to -\infty$. La qualité de votre rédaction est importante.

(e) La définition que vous avez donnée en (b) est-elle équivalente à

$$\forall R' \leqslant 1,\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_1,\ x_n \leqslant R' \ ? \tag{1}$$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

/6

Question 5. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence :

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 4).$$

Montrez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminez la valeur de sa limite. Justifiez toutes étapes de votre raisonnement.