Analyse mathématique I (A)

Examen (13 janvier 2017)

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez, si elle existe, la limite au sens large de chacune des suites suivantes. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez. /10

- $x_n = \dfrac{7n^3 + (n+3)^2 + 5}{-n^2 + 2n + 3}$
- $y_n = \dfrac{4^n \cdot n^3 + 5n}{5^n \cdot n^4 + 3n^2 + 7}$
- $z_n = \dfrac{e^n + 3n^3 + 5}{2n^2 + 1}$
- $w_n = \dfrac{(-2)^n + 4n^2 + \cos(n)}{5n^3 + 2}$
- $v_n = \dfrac{(-1)^n \cdot 7n^2 + 5}{4n + (-1)^n}$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (13 janvier 2017)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 2. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par une preuve ou un contre-exemple. /10

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Aucune suite strictement croissante ne converge au sens strict.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe deux suites différentes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ telles que $x_n \to 1$, $y_n \to 1$ et $x_n - y_n \to 0$.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ telle que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni croissante, ni décroissante mais telle que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et convergente.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 2 (suite).

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ La suite $\left(\left(\frac{\alpha^2+\alpha-2}{\alpha-1}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniquement au sens strict quel que soit $\alpha \in \,]-\infty, 0[$.

(f) Vrai : ☐ Faux : ☐ La suite $\left(\left(\frac{(\alpha+3)^2+\alpha+3}{\alpha+4}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge pour un $\alpha \in \,]-4, 0[$.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 3.

/7

(a) Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « a est le maximum de A ».

(b) En utilisant la définition donnée en (a), montrez que le maximum de l'ensemble $[-1,3[$ n'existe pas.

(c) Calculez le suprémum et l'infimum des ensembles suivants. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez.

$$A := \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \sin\left(1 + \frac{1}{n}\right) \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\} \qquad B := \left\{ (-1)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 4.

/7

(a) Soient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a ».

(b) En utilisant la définition donnée en (a), montrez que $2 - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}+1} \to 2$. La qualité de votre rédaction est importante.

(c) Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La définition que vous avez donnée en (a) est-elle équivalente à

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \exists n_0' \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0', \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \frac{x_n}{a} \leqslant 1 + \frac{1}{k}\ ? \tag{1}$$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 5. On considère une suite de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant 0, \tag{2}$$

$$x_{n+1} - x_n^2 - x_n \to 0. \tag{3}$$

/7

Prouvez les affirmations suivantes.

(a) Toute suite positive (x_n) qui tend vers 0 vérifie[1] (3).

(b) Si la suite (x_n) converge (au sens strict), alors sa limite vaut nécessairement 0.

(c) La propriété (3) est équivalente à l'existence d'une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $z_n \to 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = x_n^2 + x_n + z_n. \tag{4}$$

(d) Pour tout $r > 0$, il existe un n_r^* tel que, quel que soit $n \geqslant n_r^*$, si $x_n \geqslant r$ alors $x_{n+1} \geqslant x_n$.

(e) Si (x_n) ne converge pas vers 0, alors il existe un $\rho > 0$ et un $m \geqslant n_\rho^*$ (où n_ρ^* est donné par le point (d) pour $r = \rho$) tel que $x_m \geqslant \rho$.

(f) En supposant que (x_n) soit bornée, on a $x_n \to 0$. (Indication : procédez par l'absurde.)

[1] On ne *suppose* donc bien entendu *pas* ici que (x_n) vérifie (3) !

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.