Analyse mathématique I (B)

Examen

(22 avril 2017)

Nom : ____________

Prénom : ____________

Section : ________

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Considérons l'équation différentielle suivante : /5

$$\partial_t^2 u(t) + 10\partial_t u(t) - 11u(t) = \mathbf{i}\,\mathrm{e}^t\,.$$

où $\mathbf{i}^2 = -1$.

(a) Déterminez l'ensemble des solutions complexes de cette équation.

(b) Cette équation admet-elle des solutions réelles ? Si oui, déterminez-les. Justifiez.

(c) Vérifiez à partir de la définition de solution que celles obtenues au point (a) en sont bien.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (22 avril 2017)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ avec un reste exprimé en terme de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : /5

$$f(x) = \frac{\cosh(x^2)}{1 - \sin(\pi\, \mathrm{e}^x)}.$$

Expliquez et justifiez les calculs que vous effectuez. En déduire la valeur de $\partial_x f(0)$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Soit l'équation $x^2 + \lambda\, e^x = 1 + \lambda$, où λ est un paramètre réel. Montrez rigoureusement que cette équation possède une unique solution dans $[0, +\infty[$ quel que soit $\lambda \in [0, +\infty[$. Expliquez votre démarche, détaillez vos calculs et énoncez les résultats utilisés.

/5

Nom :
Prénom :
Section :

/7

Question 4. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sinh(\lambda x) + 1 & \text{si } x < 0, \\ e^{\lambda x^2} & \text{si } x \in [0,1], \\ \sin(\lambda\, e^{x}) + x^3 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(a) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est continue sur $]1, +\infty[$.

(b) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est dérivable en $2/3$.

(c) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est continue en 0.

(d) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est dérivable en 0.

Justifiez en *détail* toutes vos affirmations.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + \frac{1}{2x^2+3}$. En utilisant la définition en ε-δ, montrez que f est continue sur son domaine de définition. $/4$

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (22 avril 2017)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse par un bref argument ou un contre-exemple explicite.

/6

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications dérivables sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Supposons que $\partial_x g_1(a) = \partial_x g_2(a)$. Alors l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} g_1(x) & x > a \\ g_2(x) & x \leqslant a \end{cases}$ est continue en a.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ une application continue. Alors f est constante.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6 (suite).

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \end{cases}$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Nom :
Prénom :
Section :

/4

Question 7. Considérons l'affirmation suivante :

> Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $\alpha > 0$ tels que $\forall \sigma \in [0, \alpha]$, $\exists x \in [a, b - \sigma]$, $f(x + \sigma) = f(x)$.

(a) Illustrez cette affirmation par un dessin. Veillez à identifier les différents éléments de l'affirmation et expliquez à partir de ce dessin pourquoi l'affirmation est vraie.

(b) Énoncez le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème des bornes atteintes.

(c) Prouvez l'affirmation.