Analyse mathématique I (B)

Examen (31 mai 2017)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Considérons l'équation différentielle suivante : /5

$$\partial_t^2 u(t) - 2\sqrt{2}\partial_t u(t) + 2u(t) = \cos(2t).$$

(a) Déterminez l'ensemble des solutions complexes de cette équation.

(b) Vérifiez explicitement que les solutions obtenues à la question (a) sont bien des solutions de l'équation.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (31 mai 2017)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 2. Calculez le développement de Taylor d'ordre 3 en $x = 0$ avec un reste exprimé en terme de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : /5

$$f(x) = \left(\frac{\cos(e^{x^2})}{1 + x^2} \right)^2.$$

Expliquez et justifiez les calculs que vous effectuez. En déduire la valeur de

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{\sin(x)\, e^{x^2}}.$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2\cos^2(x) - \lambda\, \mathrm{e}^x$, où $\lambda \in \,]0,1]$. /5

(a) Montrez que f est continument dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrez que l'équation $\partial_x f(x) = 0$ a une unique solution dans $[-\pi/2, 0]$.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (31 mai 2017)

Nom :
Prénom :
Section :

/7

Question 4. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + x & \text{si } x < 0 \\ \lambda x & \text{si } x \in [0,2] \\ 2\lambda^3 \, \mathrm{e}^{\sin(x-2)} & \text{si } x > 2, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(a) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est continue sur $]0,2[$.

(b) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est dérivable en 2017.

(c) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est continue en 2.

(d) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est dérivable en 2.

Justifiez en *détail* toutes vos affirmations.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

/4

Question 5. Soit l'application

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ \cos(x) & x \geqslant 0. \end{cases}$$

En utilisant la définition en ε-δ (à rappeler), montrez que f est continue sur son domaine de définition. INDICATION : $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (31 mai 2017)

Nom :

Prénom :

Section :

/6

Question 6. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse par un bref argument ou un contre-exemple explicite.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Supposons que $f(x) = 1 + x + x^2 + o\big((x-1)^3\big)$. Alors f est dérivable en 1 et $\partial f(1) = 1$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $a < b$, deux nombres réels, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application. Si $f(a) = f(b)$ et f est dérivable sur $]a,b[$, alors f a un extremum.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Considérons la fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} t+1 & t < 0 \\ t & t \geqslant 0 \end{cases}$. Alors u est une solution de l'équation différentielle $\partial_t u(t) = 1$.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (31 mai 2017)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ \partial^2 f(x) < 0$. Alors f a au plus une racine dans l'intervalle $]0, +\infty[$. Justifiez en détail vos affirmations.

/4