Analyse mathématique I (A)

Examen (2 juin 2017)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez, s'ils existent, $\sup A$, $\min A$, $\inf B$ et $\max B$. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez. /4

$$A := \left\{5 + 4\cos\left(\frac{2}{n}\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}_0\right\} \qquad B := \left\{\frac{4n^2+5}{7n^3+4} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 2. Calculez, si elle existe, la limite au sens large de chacune des suites suivantes. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez.

/10

- $x_n = \dfrac{3n + \pi \cos(n) + 5n^2}{4n^3 + 5n^2 + 6}$
- $y_n = \dfrac{3^n n^2 + \cos(n) + 5}{2^n n + 3}$
- $z_n = \dfrac{2n^3 + 5n^2 + (-1)^n}{\sin^2(n) + 6n}$
- $v_n = \dfrac{(-1)^{n+1} n^3 + 1}{n - 42}$
- $w_n = \dfrac{-3n^3 + 5n^2 + 3n + 1}{n + \cos^2(n) + 1}$

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (2 juin 2017)

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 3. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par une preuve ou un contre-exemple.

/10

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$. On a que $\min(\lambda A)$ et $\min(A)$ existent simultanément auquel cas $\min(\lambda A) = \lambda \min(A)$ où, pour rappel, $\lambda A := \{x \mid \exists a \in A,\ x = \lambda a\}$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Si $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent au sens strict alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent au sens strict.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non-vide et borné supérieurement. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application croissante et continue alors $f\big(\sup(A)\big) = \sup\big(f(A)\big)$.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 3 (suite).

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient $A,B \subseteq \mathbb{R}$. Si $\sup(A) = \inf(B)$ alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$, $\exists y \in B$, $|x-y| < \varepsilon$.

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ La suite $\left(\left(\frac{-4\alpha^2+3\alpha+1}{\alpha-1}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens large quel que soit $\alpha \in \left]-\infty, 0\right[$.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (2 juin 2017)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 4. /7

(a) Soient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a ».

(b) En utilisant la définition donnée en (a), montrez que $\dfrac{2n^2 + (-1)^n + \cos(n)}{4n^3 + 5n + 1} \to 0$. La qualité de votre rédaction est importante.

(c) Soit $a \in \mathbb{R}$. La définition que vous avez donnée en (a) est-elle équivalente à

$$\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N^2,\ |x_n - a| \leqslant \frac{1}{p^2+p}\ ? \qquad (1)$$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 5. Soient (x_n), (y_n) deux suites de nombres réels. On dit que (x_n) et (y_n) sont deux suites *adjacentes* si elles vérifient les deux conditions suivantes :

/10

$$\text{une des suites est croissante et l'autre décroissante,} \tag{2}$$

$$x_n - y_n \to 0. \tag{3}$$

(a) Montrez que les suites de nombres réels $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $y_n = x_n + \frac{1}{n}$ sont adjacentes.

(b) Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(i) Déterminez si la suite $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

(ii) Montrez que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n - y_n \leqslant 0$.

(iii) En déduire la convergence au sens strict des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(iv) Que peut-on dire de la limite de deux suites adjacentes ?

(v) Peut-on en déduire que (x_n^3) et (y_n^3) sont aussi adjacentes ? Justifiez votre réponse.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.