

Analyse mathématique I (A)

Examen

(18 août 2017)

Nom : _____
Prénom : _____
Section : Mathématique

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez, s'ils existent, $\sup A$, $\min A$, $\inf B$ et $\max B$. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez.

/4

$$A := \{x^2 + 2x + 3 \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad B := \left\{3 \cos\left(\frac{1}{n}\right) + 5 \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}.$$

Analyse mathématique I (partie A)

Examen

(18 août 2017)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : Mathématique

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 2. Calculez, si elle existe, la limite au sens large de chacune des suites suivantes. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez.

/ 10

$$\blacksquare x_n = \frac{\sin(n) + 3 \cos(n^2)}{\sqrt{n}}$$

$$\blacksquare y_n = \frac{n^3 + 5n}{n^2 + \sin(n) + \ln(n)}$$

$$\blacksquare z_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$$

$$\blacksquare v_n = \frac{-4^n \cdot n^2 + 5}{n}$$

$$\blacksquare w_n = 3^n \cdot e^{-3n}$$

Analyse mathématique I (partie A)

Examen

(18 août 2017)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : Mathématique

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen

(18 août 2017)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : Mathématique

Question 3. Pour chacune des affirmations suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez par une preuve ou un contre-exemple.

/10

(a) Vrai : Faux : Aucune suite strictement croissante ne converge au sens strict.

(b) Vrai : Faux : Si une suite ne converge pas vers $+\infty$, alors elle est bornée.

(c) Vrai : Faux : Le maximum d'un ensemble fini existe toujours.

Question 3 (suite).

(d) Vrai : Faux : Toute suite de rationnels converge dans \mathbb{R} .

(e) Vrai : Faux : La suite $\left(\left(\frac{5+4\alpha}{2\alpha}\right)^n\right)$ converge au sens large quel que soit $\alpha \in]-\infty, 0[$.

Question 4.

/7

(a) Soit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Définissez « $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$ ».

(b) En utilisant la définition donnée en (a), montrez que $\frac{6^n + 3^n \cdot n^2}{n} \rightarrow +\infty$. La qualité de votre rédaction est importante.

(c) La définition que vous avez donnée en (a) est-elle équivalente à

$$\forall k \in \mathbb{Z}^{<0}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq \sqrt{N}, x_n \geq \frac{k^2}{3!} ? \quad (1)$$

Analyse mathématique I (partie A)

Examen

(18 août 2017)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : Mathématique

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 5. Soit a un réel strictement positif. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la récurrence :

$$\begin{cases} x_0 > 0, \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right). \end{cases}$$

(a) Montrez que pour tout naturel n , x_n est strictement positif.

(b) Montrez que $x_{n+1}^2 - a = \frac{(x_n^2 - a)^2}{4x_n^2}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

(c) La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, déterminez sa limite.

/6

Analyse mathématique I (partie A)

Examen

(18 août 2017)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : Mathématique

Question 5 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.