Analyse mathématique I (A)

Examen

(17 janvier 2018)

Nom :	
Prénom :	
Section : Mathématique	

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez, si elle existe, la limite au sens large de chacune des suites suivantes. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez. /6

$$x_n = \frac{-6n^2+4n+1}{3n-2}, \qquad y_n = \frac{-3n^3+5n^2+\cos(n)}{6n^4+5n^3+4n+3}, \qquad z_n = \frac{(-1)^n \cdot n^3+5n^2+1}{n^2+(-1)^n \cdot n+2}.$$

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (17 janvier 2018)

Nom :	
Prénom :	
Section : Mathématique	

Question 2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la récurrence :

/5

$$\begin{cases} x_0 \in]0,1], \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{x_n^2}{4}. \end{cases}$$

Montrez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminez la valeur de sa limite. Justifiez toutes les étapes de votre raisonnement.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (17 janvier 2018)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 3. /8

(a) Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Définissez « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$ ».

(b) Soient une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a ».

(c) En utilisant la définition donnée en (a), montrez que $n^2 + 5^n + 1 \to +\infty$. La qualité de votre rédaction est importante.

(d) Soit $C \subseteq \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. Définissez « c est le maximum de C ».

(e) Calculez, quand ils existent, le suprémum, l'infimum et le maximum des ensembles suivants. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez.

$$A := \left\{ 2 + \frac{(-5)^n}{n!} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$B := \left\{ x_n y_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R},\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R},\ x_n \to +\infty \text{ et } \exists a \in \mathbb{R}^{>0},\ y_n \to a \right\}.$$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 4. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels. Supposons que $x_n \to -\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n \geqslant 2$. Montrez en utilisant directement les définitions en ε-n que $x_n y_n \to -\infty$. $/4$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 5. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ telle que $\exists (x_n) \subseteq A,\ x_n \to 1$. Peut-on dire qu'alors, nécessairement, /4

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\sup A \leqslant 1$?

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\sup A = 1$?

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ $\sup A \geqslant 1$?

Pour chaque réponse, donnez un bref argument ou un contre-exemple qui la justifie.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (17 janvier 2018)

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 6.

/6

(a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$ une suite décroissante de nombres réels telle que $\forall\delta > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}$, $|x_n| < \delta$. Montrez qu'alors $x_n \to 0$.

(b) Le résultat du point précédent est-il encore valable si y on remplace « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$ » par « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ » ?