Analyse mathématique I (A)

Examen (6 juin 2018)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez, si elle existe, la limite au sens large de chacune des suites suivantes. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez. /6

$$x_n = \frac{-5n^2+3}{2+\sin(n)}, \qquad y_n = \frac{\pi n^2+3n^3+5}{\pi n^4+4n^2+3}, \qquad z_n = \frac{(-1)^n+(-1)^n n^2}{5n+2}.$$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

/6

Question 2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la récurrence :

$$\begin{cases} x_0 = 1, \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^3}{3} + \dfrac{x_n}{4}. \end{cases}$$

Montrez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminez la valeur de sa limite. Justifiez toutes les étapes de votre raisonnement.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (6 juin 2018)

Nom : ____________

Prénom : ____________

Section : Mathématique

Question 3. /10

(a) Soient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a ».

(b) En utilisant la définition donnée en (a), montrez que $1 + \dfrac{3\cos(n) + 5n^{1/2}}{8n^3} \to 1$. La qualité de votre rédaction est importante.

(c) Soient $C \subseteq \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. Définissez « c est le minimum de C ».

(d) Calculez, quand ils existent, le suprémum, l'infimum, le minimum et le maximum des ensembles suivants. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez.

$$A := \left\{n^3 + 2 \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\} \qquad B := \left\{3 + 2\frac{\cos^2(n)}{n^2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

/4

Question 4. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,+\infty[$ une suite telle que $x_n \to 0$.

(a) Prouvez que $\max\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ existe.

(b) Le résultat reste-t-il vrai pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$?

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (6 juin 2018)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 5. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

/6

(a) Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Définissez « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-\infty$ ».

(b) Soit une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Définissez « $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$ ».

(c) Montrez en utilisant *directement* les définitions de convergence que si $x_n \to -\infty$ et $y_n \to a$ où a est un réel strictement négatif alors, il existe un $p \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\left|\frac{x_n}{y_n}\right|\right)_{n\geqslant p}$ soit une suite qui converge vers $+\infty$.

(d) Le résultat reste-t-il vrai si on suppose seulement $a \in \mathbb{R}$ (plus forcément strictement négatif) ?

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 6. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui vérifie la propriété suivante :

/6

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ x_n + 1 \leqslant x_m. \tag{1}$$

(a) Montrez que si de plus (x_n) est croissante, alors $x_n \to +\infty$.

(b) De manière générale, prouvez que (1) implique qu'il existe une sous-suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x'_n \to +\infty$.