Analyse mathématique I (B)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Examen

(11 juin 2018)

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Considérons l'équation différentielle suivante : /5

$$\partial_t^2 u(t) - 2\partial_t u(t) + 2u(t) = (1+2t)\,\mathrm{e}^{2t}\,.$$

(a) Déterminez l'ensemble des solutions réelles de cette équation.

(b) En utilisant la définition de solution, vérifiez que les solutions obtenues à la question (a) sont bien des solutions de l'équation.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (11 juin 2018)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Calculez le développement de Taylor d'ordre 4 en $x = 0$ avec un reste exprimé en terme de petit o de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : /5

$$f(x) = \mathrm{e}^{\sin x + 1}.$$

Expliquez et justifiez les calculs que vous effectuez. Toutes les règles sur les petits o utilisées doivent être redémontrées. Pensez à regrouper les cas pour éviter la répétition d'arguments semblables.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

/5

Question 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -\mathrm{e}^x + \lambda x$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Montrez que f est continument dérivable sur $\mathbb{R}$, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Montrez que l'équation $\partial_x f(x) = x$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Justifiez rigoureusement toutes vos affirmations.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (11 juin 2018)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 4. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

/7

$$f(x) = \begin{cases} 18\lambda^2 x^2 + \lambda x + \frac{1}{8} & \text{si } x < -2, \\ \big||x| - 1\big| & \text{si } x \in [-2, 2], \\ e^{\lambda x} - 3 & \text{si } x > 2, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(a) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est continue sur $]-2, 2[$.

(b) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est dérivable en 4.

(c) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est continue en 2.

(d) Déterminez la ou les valeurs de λ pour lesquelles f est dérivable en -2.

Justifiez *en détail* toutes vos affirmations.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (11 juin 2018)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5.

/4

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $A \subseteq \mathbb{R}$. Définissez « f est continue sur A » en ε-δ.

(b) On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(x)$

En utilisant directement[1] la définition donnée en (a), montrez que f est continue sur son domaine de définition.

[1] Ceci implique que les théorèmes sur les limites ne peuvent être employés dans cette question.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen (11 juin 2018)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application *continue*. /6

(1) Définissez les propriétés suivantes :

Propriété 1 : f est ultimement strictement croissante.

Propriété 2 : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Propriété 3 : f est non bornée supérieurement.

(2) Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez chacune de vos réponses par un bref argument ou un contre-exemple explicite.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Propriété 1 $\Rightarrow$ Propriété 2.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Propriété 2 $\Rightarrow$ Propriété 1.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Propriété 1 $\Rightarrow$ Propriété 3.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Propriété 3 $\Rightarrow$ Propriété 1.

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ Propriété 2 $\Rightarrow$ Propriété 3.

(f) Vrai : ☐ Faux : ☐ Propriété 3 $\Rightarrow$ Propriété 2.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7.

/6

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable telle qu'il existe une suite non ultimement constante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = 0$. Montrez qu'alors $f(0) = 0$ et $\partial f(0) = 0$.

(b) Donnez un exemple d'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall x \in \,]-\infty, 0[,\ f(x) = 0$ et $\forall x \in \,]0, +\infty[,\ f(x) > 0$.

(c) Est-il possible de trouver une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle qu'il existe une suite non ultimement constante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = 0$ et une suite non ultimement constante $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x'_n) = x'_n$?