Analyse mathématique I (A)

Examen

(17 août 2018)

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez, si elle existe, la limite au sens large de chacune des suites suivantes. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez. $/6$

$$x_n = \frac{3^n \cos(n^2) + 5}{4^n n^2 + 3}, \qquad y_n = \frac{6n^3 + 3n^2 + 1}{3 + \sin(5n)}, \qquad z_n = \frac{(-1)^n n^2 + 1}{n}.$$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

/4

Question 2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la récurrence :

$$\begin{cases} x_0 = 2, \\ x_{n+1} = \dfrac{3x_n + 1}{4}. \end{cases}$$

Montrez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminez la valeur de sa limite. Justifiez toutes les étapes de votre raisonnement.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (17 août 2018)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 3. /10

(a) Soient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a ».

(b) En utilisant la définition donnée en (a), montrez que

$$\frac{12n^4 + 10n^3 + 8n^2 + 6n + 4\sin(2n^3+1) + 5}{6n^4 + 5n^3 + 2n^2 + 3n + 1} \to 2.$$

La qualité de votre rédaction est importante.

(c) Soient $C \subseteq \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. Définissez « c est l'infimum de C ».

(d) Calculez, quand ils existent, l'infimum, le suprémum, le minimum et le maximum des ensembles suivants. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez.

$$A := \left\{ \frac{6n^3 + 3n^2 + 1}{3 + \sin(5n)} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \qquad B := \left\{ \frac{-n^3 + 5n^2}{3 + \cos(n)} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 3 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (17 août 2018)

Nom :	
Prénom :	
Section : Mathématique	

Question 4. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels. Montrez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée si et seulement si il existe une sous-suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|y_n| \to +\infty$. /4

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 5. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels telles que /4

$$0 \leqslant u_n \leqslant 1,$$
$$0 \leqslant v_n \leqslant 1.$$

Montrez que si $u_n v_n \to 1$ alors $u_n \to 1$ et $v_n \to 1$.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (17 août 2018)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 6. Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$.

/5

(a) Définissez « $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ultimement constante ».

(b) Prouvez que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est *pas* ultimement constante et $x_n \to 0$, alors il existe une sous-suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x'_n \to 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x'_n \neq 0$.