

Analyse mathématique I (B)

Examen

(27 août 2018)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veuillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\partial_t^2 u(t) + 2\partial_t u(t) + 5u(t) = (5 - 8t)e^{-t}.$$

Déterminez l'ensemble des solutions réelles de cette équation.

/5

Analyse mathématique I (partie B)

Examen

(27 août 2018)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 1 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 2. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$. Calculez le développement de Taylor d'ordre 4 en $x = 0$ avec un reste exprimé en terme de petit o de la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = e^{(f(x))^2}.$$

Expliquez et justifiez les calculs que vous effectuez. Toutes les règles sur les petits o utilisées doivent être redémontrées. Pensez à regrouper les cas pour éviter la répétition d'arguments semblables.

/5

Analyse mathématique I (partie B)

Examen

(27 août 2018)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 2 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen

(27 août 2018)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 3. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x) e^{-x}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sinh(x)$. Montrez que l'équation $f(x) = 4g(x) - 1$ possède une unique solution dans $[0, +\infty[$. Justifiez rigoureusement toutes vos affirmations.

/5

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin(x)} & \text{si } x < 0, \\ |\sin(x)| & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Déterminez l'ensemble des points du domaine où f est continue ainsi que l'ensemble des points du domaine où f est dérivable. Justifiez *en détail* toutes vos affirmations.

/7

Analyse mathématique I (partie B)

Examen

(27 août 2018)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Question 5.

/5

(a) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $A \subseteq \mathbb{R}$. Définissez « f est continue sur A » en ε - δ .

(b) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x^4 - 2}$.

En utilisant directement¹ la définition donnée en (a), montrez que f est continue sur son domaine de définition.

¹Ceci implique que les théorèmes sur les limites ne peuvent être employés dans cette question.

Question 6. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ une application *continue*.

/6

(a) Définissez les propriétés suivantes :

Propriété 1 : f est strictement croissante au voisinage de 0.

Propriété 2 : f est bornée sur $[-1, 1]$.

Propriété 3 : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe (au sens strict).

(b) Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez chacune de vos réponses par un bref argument ou un contre-exemple explicite.

(i) Vrai : Faux : Propriété 1 \Rightarrow Propriété 2.

(ii) Vrai : Faux : Propriété 2 \Rightarrow Propriété 1.

(iii) Vrai : Faux : Propriété 1 \Rightarrow Propriété 3.

(iv) Vrai : Faux : Propriété 3 \Rightarrow Propriété 1.

(v) Vrai : Faux : Propriété 2 \Rightarrow Propriété 3.

(vi) Vrai : Faux : Propriété 3 \Rightarrow Propriété 2.

Analyse mathématique I (partie B)

Examen

(27 août 2018)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 6 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Question 7. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications dérivables. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$.

/6

- (a) Montrez que si, pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$ et un certain $b \in \mathbb{R}$, $f(x_0) < b$, alors $\exists \rho > 0$,
 $\forall x \in [x_0 - \rho, x_0 + \rho], f(x) < b$.
- (b) Montrez que h est continue sur \mathbb{R} .
- (c) A-t-on également que h est dérivable ?