Analyse mathématique I (A)

Examen

(14 janvier 2019)

Nom :	
Prénom :	
Section : Mathématique	

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom et prénom sur *toutes* les feuilles. Les feuilles qui ne respectent pas ces consignes seront pénalisées.
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'examen dure 4 heures.
- Veuillez vous assurer que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction* soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons.
- N'employez *pas* la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez chacune de vos réponses par un bref argument ou un contre-exemple explicite. /8

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente est monotone à partir d'un certain rang.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{R}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 1 (suite).

(c) Vrai : ☐ Faux : ☐ Si une suite d'entiers converge alors elle est constante à partir d'un certain rang.

(d) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$. Si $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$ alors $(u_n - \ell)(v_n - \ell') \to 0$.

(e) Vrai : ☐ Faux : ☐ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si $u_n \to +\infty$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n := u_{n+1} - u_n$ diverge.

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 2. Calculez, si elle existe, la limite au sens large de chacune des suites suivantes. Détaillez vos calculs et énoncez les résultats que vous utilisez.

/6

$$x_n = \frac{7n^3 + (-1)^n \cdot n^2 + 3}{5n+2}, \qquad y_n = \frac{5\cos(n^5) + 3n}{4n^2+3}, \qquad z_n = \frac{(-1)^n \cdot n^3 + 5n^2 - 3}{5n^2+2}.$$

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la récurrence :

/5

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2}, \\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n}{2+7x_n}. \end{cases}$$

Montrez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminez la valeur de sa limite. Justifiez toutes les étapes de votre raisonnement.

Analyse mathématique I (partie A)

Examen (14 janvier 2019)

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 4. /6

(a) Soient une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Définissez « $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a ».

(b) En utilisant la définition donnée en (a), montrez que $\frac{\sin(n)}{\mathrm{e}^n} \to 0$. La qualité de votre rédaction est importante.

(c) Calculez, quand ils existent, le suprémum, l'infimum, le minimum et le maximum des ensembles suivants. Expliquez votre démarche et énoncez les résultats que vous utilisez.

$$A := \left\{ \frac{2^n}{2^n - 1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}, \qquad B := \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom :	
Prénom :	
Section : Mathématique	

Question 5. Soit $A \subseteq]0,+\infty[$ un ensemble non vide. $/4$

(a) Montrez $(\forall x \in A,\ \exists y \in A,\ y < x/2) \Rightarrow \big(\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A,\ x_n \to 0\big)$.

(b) Le résultat du point précédent est-il encore valable si on remplace l'hypothèse « $A \subseteq]0,+\infty[$ » par « $A \subseteq \mathbb{R}$ » ?

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

Question 6. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Montrez que si $\forall C \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ x_n < C$, alors il existe (x'_n) une sous-suite de (x_n) tel que $x'_n \to -\infty$. Veillez à la qualité de votre rédaction. /4

Nom :
Prénom :
Section : Mathématique

/9

Question 7. Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$r_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

(a) Montrez $\forall m,n \in \mathbb{N},\ m > n \geqslant 2 \Rightarrow |r_m - r_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^{m-n-1}}\right)$.

(b) Montrez $\forall m,n \in \mathbb{N},\ m > n \Rightarrow |r_m - r_n| \leqslant \frac{1}{n}$. *Indication :* Rappelons que la somme des k premiers termes d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$ est $u_0 \cdot \frac{1-q^k}{1-q}$.

(c) Montrez que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. La limite de cette suite est le nombre réel e.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons $p_n := n!(\mathrm{e} - r_n)$.

(d) Prouvez que, $\forall n \geqslant 2,\ p_n \in \,]0,1[$ et que $p_n \to 0$. *Indication :* Utilisez l'inégalité plus forte établie en prouvant (b) et passez à la limite sur m (en justifiant toutes ces étapes).

(e) Supposons que $\mathrm{e} \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers strictement positifs p et q qui n'ont aucun diviseur commun tels que $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$. Montrez que pour tout $n > q$, $p_n \in \mathbb{N}$. Concluez que e est irrationnel.

Nom :

Prénom :

Section : Mathématique

Question 7 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.