Université Paris 7
Denis Diderot

Analyse d’un enseignement de topologie en première année d’université

Stéphanie BRIDOUX

Directeur : Aline ROBERT
Co-directeur : Marc ROGALSKI

Master de didactique des mathématiques
Option recherche

Juin 2005

Table des matières

Chapitre I

Contexte de la recherche

1 Le point de départ : un cours d'analyse mathématique

Dans ce travail, nous présentons une recherche menée en 2003-2004 dans le cadre d'un cours d'analyse mathématique donné à l'Université de Mons-Hainaut[1], en Belgique. Nous indiquons, dans l'annexe A, une organisation succincte de l'enseignement évoqué ici.

Plus précisément, nous nous sommes centrée sur le cours de première année et ce, pour diverses raisons. Tout d'abord, nous participons à l'enseignement de l'analyse à ce niveau, ce qui nous place dans un rôle d'observateur privilégié, curieux des processus d'enseignement et d'apprentissage. Ensuite, l'analyse est le cours de mathématiques le plus volumineux du programme de la première année. De nombreux concepts sont présentés et la matière s'enchaîne au fil des chapitres, ce qui rend le cours difficile aux yeux des étudiants. Enfin, ce cours est destiné à des étudiants de sections mathématique, physique et informatique, donc à un public assez hétérogène, même si la quasi-totalité d'entre eux provient de filières scientifiques de l'enseignement secondaire. Les trois sections réunies forment un groupe constitué d'une centaine d'étudiants, un nombre qui fluctue légèrement selon les années. Signalons que l'organisation de l'enseignement secondaire belge pour les trois dernières années du lycée est semblable à celle de la France, si ce n'est qu'il n'y a pas de baccalauréat ; les examens sont propres à chaque lycée. En revanche, une différence majeure avec la France est qu'en Belgique, ce sont les meilleurs étudiants qui se destinent à des études universitaires. A l'issue de la première année, les sections mathématique, physique et informatique ne sont

[1] L'Université de Mons-Hainaut (UMH) est implantée à Mons, chef-lieu de la province du Hainaut. Elle regroupe environ 3000 étudiants au sein de quatre facultés (des Sciences, de Psychologie et Sciences de l'Education, de Médecine et Pharmacie, des Sciences de gestion). L'UMH est très sensible aux difficultés rencontrées par les étudiants qui entrent en première année. Un encadrement pédagogique important est offert aux étudiants pour faciliter leur passage de l'enseignement secondaire à l'université. Des activités de remédiation sont organisées dans toutes les facultés. Des postes pédagogiques sont consacrés à l'encadrement des étudiants de première année.

plus regroupées, l'organisation des cours dépend de chaque discipline. La finalité du cours d'analyse diffère donc selon les sections. Par conséquent, nous devons tenir compte de cette double diversité, au début et à la fin du cours, qui donne une certaine spécificité à notre enseignement.

2 Description du cours

Le cours d'analyse démarre en novembre[2] et se termine en mai. Il est scindé en une partie théorique qui se déroule en cours magistraux (85 heures) et en séances d'exercices (80 heures). Les étudiants ont donc, en général, deux séances de théorie et deux séances d'exercices par semaine, soit une charge horaire d'environ 8 heures et trente minutes par semaine[3]. Pour les séances d'exercices, les étudiants sont séparés en deux groupes ; le premier est constitué des informaticiens et le second des mathématiciens et des physiciens. Chaque groupe comprend ainsi plus ou moins cinquante étudiants. Les exercices résolus sont identiques dans les deux groupes. Les séances d'exercices sont assurées par un assistant. Elles se donnent en parallèle avec la théorie, ce qui implique que dès qu'un sujet est enseigné, les étudiants sont confrontés aux exercices s'y rapportant environ une semaine plus tard. Durant les séances d'exercices, les étudiants choisissent de travailler seuls ou en groupes. Pendant ce temps, l'assistant passe auprès des étudiants et présente ensuite la correction au tableau.

Le cours d'analyse que nous décrivons ici reprend les notions de base de l'analyse des fonctions de plusieurs variables réelles. Une table des matières détaillée est donnée dans l'annexe B.

3 Un choix de contenu : la topologie de $\mathbb{R}^N$

Vers le mois de février (début du second semestre), après un travail sur la convergence des suites vectorielles, un chapitre du cours est consacré à une introduction à la topologie de $\mathbb{R}^N$. Ce choix de contenu se justifie par le fait que cette discipline constitue la base du cours d'analyse de deuxième année en section mathématique. Cette partie du programme est complètement nouvelle pour tous les étudiants en ce sens qu'elle n'a pas été abordée dans l'enseignement secondaire. De plus, cette partie est porteuse d'un formalisme nouveau, tant sur le plan des symboles utilisés (intérieur, complémentaire, quantificateurs,...) que sur celui de

[2] L'année académique commence en septembre. Les cours des six premières semaines sont consacrés aux mathématiques considérées comme les bases pour aborder les cours de première année. C'est pour cette raison que des cours tels que l'analyse ou l'algèbre linéaire démarrent plus tard dans l'année.

[3] Chaque lundi, une séance facultative de remédiation est aussi organisée. Avec l'aide d'un assistant, les étudiants rédigent des résumés, obtiennent des explications complémentaires, résolvent des exercices supplémentaires, ... Le déroulement de la séance est fonction des besoins des étudiants.

leur utilisation dans des écritures plus complexes. Nous allons nous intéresser à cette partie de l'enseignement.

Nous avons pu constater, au fil des années, et sur la base d'évaluations[4], que cette partie du cours est source de nombreux problèmes de compréhension pour les étudiants. Nous faisons l'hypothèse qu'une raison à ces difficultés est que l'usage des quantificateurs n'est pas un enjeu explicite de l'enseignement secondaire. L'étudiant doit donc construire les prérequis nécessaires à la topologie en même temps qu'il tente d'accéder à la maîtrise des nouveaux concepts. Mais il y a sûrement d'autres raisons à ces difficultés de compréhension. D'où l'envie de nous intéresser, de notre point de vue d'enseignant, aux questions suivantes :

> Quelles sont les spécificités des concepts topologiques enseignés et quelles difficultés ceux-ci peuvent-ils poser à ce niveau d'enseignement ?

4 Spécificités des concepts topologiques : choix d'un cadrage théorique

Nous nous sommes interrogée sur les problèmes liés au formalisme, suivant notre première intuition décrite au paragraphe précédent. Ce problème n'est pas nouveau. Nous évoquons successivement quelques travaux antérieurs ayant un rapport avec le problème du formalisme. Nous expliquons ensuite comment nous nous sommes appuyée sur ces recherches pour dégager les outils didactiques que nous utilisons et les pistes de travail que nous exploitons pour avancer dans nos questions.

4.1 Travaux antérieurs sur les mathématiques de la scolarité post-obligatoire

►► Les démonstrations attendues

A. Robert (1998) s'est intéressée à l'enseignement des mathématiques au lycée et à l'université. A ces niveaux, les mathématiques enseignées deviennent complexes en ce sens qu'elles commencent à ressembler aux mathématiques des mathématiciens professionnels. Cette complexité est étudiée en se plaçant du côté des experts et du côté des étudiants.

Nous retenons, en particulier, que l'étudiant doit faire face, à ces niveaux d'enseignement, à de nouvelles exigences en matière de démonstrations et de formalisme. Ces démonstrations nécessitent de plus en plus une utilisation explicite de la logique élémentaire et une incursion dans la théorie des ensembles. De plus, elles peuvent devenir longues et variées. De nouveaux types de problèmes, tels l'existence ou l'unicité apparaissent. Des arguments plus ou moins imbriqués

[4] Dans les interrogations, les résultats des questions qui portent sur la topologie ne sont pas bons.

doivent être articulés au fil de la démonstration ; des changements de points de vue ou des mises en relation peuvent aussi être introduits. Soulignons que les quantificateurs deviennent indispensables, avec le problème sous-jacent de l'ordre de ces quantificateurs dans une même expression. Selon A. Robert, "*il s'introduit dans les mises en fonctionnement nécessaires aux démonstrations une certaine complexité, dans la mesure où souvent il ne s'agit plus de juxtaposer assez systématiquement des applications simples ou des théorèmes du cours mais bien de faire intervenir simultanément plusieurs éléments, de les combiner, ou d'effectuer des choix, ou de changer de point de vue, ou encore d'adapter des outils de manière un peu nouvelle, éventuellement dans de nouveaux types de problèmes. Il y a souvent plusieurs étapes imbriquées dans une seule démonstration. Les élèves peuvent avoir plusieurs initiatives à prendre s'il y a à faire des modifications non indiquées par exemple.*"

▶▶ Les apprentissages et les pratiques

Plus généralement, l'étudiant est confronté à de nouvelles demandes en matière de pratiques mathématiques. Par exemple, un théorème possède en général beaucoup d'applications qui ne sont pas toutes envisagées en classe. Un enseignant peut attendre que ces différentes possibilités d'applications soient pourtant à la disposition de l'étudiant. Celui-ci doit aussi pouvoir intégrer des connaissances déjà rencontrées dans l'introduction de nouvelles connaissances. Autrement dit, il devrait pouvoir intégrer le nouveau dans l'ancien, sans oublier ce dernier. Or, des travaux de J. Pian[5] sur les productions d'étudiants préparant le CAPES ont montré que, souvent, les étudiants n'ont à leur disposition que des savoirs juxtaposés, ils savent surtout les utiliser si les applications sont isolées et indiquées[6]. Ces travaux montrent aussi que les connaissances élémentaires ne sont pas non plus disponibles mais qu'elles sont cependant correctement utilisées sur demande.

▶▶ Les outils proposés

Les descriptions précédentes sont utilisées pour dégager quatre dimensions d'analyse permettant d'accéder à la complexité des mathématiques qui nous concernent ici (A. Robert, 1998) :

- la dimension outil / objet des notions (R. Douady,1986).
- le statut des notions à enseigner quant à leur insertion dans le paysage mathématique des élèves.

  Cette dimension permet de caractériser les notions mathématiques à enseigner aux étudiants en regardant à quelles connaissances introduites elles sont

[5] J. PIAN (1999), Diagnostic des connaissances de mathématiques des étudiants de CAPES, vers une interprétation cognitive des apprentissages individuels, *Cahier de DIDIREM* n° 34, Irem Paris 7.

[6] Ce sont des applications immédiates de théorèmes, propriétés, formules,... Il n'y a pas d'étapes à envisager.

reliées et comment elles sont reliées mais aussi à quoi elles peuvent servir dans le paysage mathématique des étudiants déjà construit ou en cours de construction. A. Robert distingue, pour les notions à enseigner les statuts suivants :

- les notions qui peuvent être présentées aux élèves directement comme des extensions de notions déjà introduites,
- les notions qui peuvent être présentées aux élèves comme réponses à de nouveaux problèmes précis,
- les notions qui ne correspondent qu'à l'introduction d'un nouveau formalisme,
- les notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices, que nous noterons « notions FUG » : ce sont des notions qui présentent une unification de notions précédentes, nécessairement associées à une généralisation grâce à un nouveau formalisme. En général, ces notions ont des caractéristiques épistémologiques qui tiennent à une genèse très longue, le passage des notions primitives à leur généralisation a été très lent et sinueux. Leur enseignement présente donc des difficultés d'introduction. A priori, il est plus difficile d'introduire des concepts qui sont éloignés des connaissances antérieures que des concepts pour lesquels la distance entre ancien et nouveau est plus réduite.

□ les niveaux de conceptualisation.

Dans (Dorier, 1997), un niveau de conceptualisation est défini comme étant un palier dans un champ de connaissances mathématiques correspondant à une organisation cohérente d'une partie du champ. Cette organisation est caractérisée par des objets mathématiques, présentés d'une certaine façon, des théorèmes sur ces objets, des méthodes associées à ces théorèmes et des problèmes résolubles avec les théorèmes du niveau considéré et en utilisant ces méthodes.

Cette dimension en termes de niveaux de conceptualisation permet d'observer, pour une même notion, les imbrications successives.

□ les niveaux de mises en fonctionnement des connaissances par les élèves.

A. Robert distingue trois niveaux de mises en fonctionnement :

- le niveau technique : ce niveau correspond à des mises en fonctionnement indiquées, isolées. Il s'agit d'applications immédiates de théorèmes, définitions,... Ce sont donc des contextualisations simples, locales et sans étapes.
- le niveau des connaissances mobilisables[7] : les mises en fonctionnement sont encore indiquées mais on dépasse l'application simple d'une propriété à la fois. Il existe, à ce niveau, un début de juxtaposition des savoirs dans un domaine donné, une certaine organisation. Ce qui est en jeu reste cependant explicite.

[7]Un savoir est dit mobilisable si, lorsqu'il est bien identifié, il est bien utilisé par les élèves.

– le niveau des connaissances disponibles : à ce niveau, l'étudiant est capable de résoudre ce qui lui est proposé sans indications, de rechercher dans ses connaissances ce qui peut intervenir.

4.2 Retour à notre problème, délimitation du cadre de travail

Parmi les outils proposés au paragraphe précédent, nous utilisons la deuxième dimension comme point de départ de notre étude.

Nous choisissons, pour la suite du travail, d'interpréter les concepts topologiques comme des notions FUG pour étudier la question de leur apprentissage. En effet, nous nous appuyons sur le fait que ces concepts sont porteurs d'un formalisme nouveau et sont généralisateurs de connaissances antérieures[8].

Une difficulté d'enseignement d'une notion FUG est donc de parvenir à construire du sens à partir des connaissances antérieures et « malgré » le nouveau formalisme à faire utiliser. Pour le chercheur, étudier une notion FUG consiste à regarder ce qui peut amener l'étudiant à une prise de sens. En effet, lorsqu'on manipule le formalisme introduit par une telle notion, on peut perdre le sens des notions que ce formalisme permet de généraliser. Le travail sur ces notions risque de s'effectuer sans contrôle et en nette rupture avec les connaissances antérieures. Une question posée par l'enseignement des FUG est alors de regarder à quelle conceptualisation les étudiants sont capables d'accéder grâce à ce travail sur le formalisme et que sont-ils capables de produire ?

Notre choix d'interpréter les notions topologiques en termes de FUG nous amène ainsi à étudier le rapport entre leur formalisation et leur conceptualisation dans les productions d'étudiants pour d'une part, caractériser les apprentissages en topologie et d'autre part, à un niveau plus critique, analyser dans quelle mesure notre interprétation permet de préciser les difficultés d'enseignement de cette discipline.

A la base de notre réflexion pour mieux comprendre ces difficultés, nous retenons, de notre point de vue de chercheur, que le formalisme a des fonctions de description et de traduction. De fait, l'introduction d'un nouveau formalisme apporte de l'économie dans les écritures utilisées et devient indispensable dans certaines démonstrations par la suite. Mais ce que les enseignants constatent souvent nous autorise à penser que cette économie n'est pas un argument de compréhension pour les étudiants. Elle peut même induire une perte de sens alors qu'on pourrait au contraire penser initialement que, grâce à la manipulation du formalisme, les étudiants parviennent à donner du sens aux objets et à les conceptualiser.

De notre point de vue d'enseignant, nous observons, en ce qui concerne le formalisme utilisé en topologie, les difficultés suivantes : soit les étudiants ne le comprennent pas du tout, soit ils semblent le comprendre mais ne le manipulent pas correctement. Or, des contraintes de temps nous poussent, dans notre ensei-

[8]Nous pensons à des notions telles que les intervalles dans $\mathbb{R}$, la continuité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,...

gnement, à progresser coûte que coûte dans les contenus. Nous restons donc, dans les séances d'exercices, à un niveau exclusivement formel en proposant surtout des applications simples et isolées. Nous en déduisons que la seule fonctionnalité de la topologie, dans notre enseignement, est une fonctionnalité de traduction formelle, sans optique de résolution de problèmes.

En première analyse, notre expérience semble donc indiquer que la dynamique entre la formalisation et la conceptualisation ne fonctionne pas bien et est en tout cas superficielle et peu durable.

Les travaux présentés sur le problème du formalisme nous amènent à préciser notre questionnement pour finalement explorer la question suivante :

> Que produit l'interprétation FUG des concepts topologiques dans l'analyse de leurs difficultés d'enseignement en termes de formalisation et de conceptualisation ?

5 Autres travaux

Nous évoquons maintenant des travaux qui appréhendent le rapport entre la formalisation et la conceptualisation de différentes manières et à différents niveaux d'enseignement.

5.1 Des questions semblables dans l'enseignement de l'algèbre linéaire

Diverses recherches sur l'enseignement de l'algèbre linéaire en première année d'université ont été rassemblées dans (Dorier, 1997). Une étude approfondie des concepts enseignés montre que leurs spécificités tiennent à la nature unificatrice et généralisatrice de la théorie : « *l'algèbre linéaire est l'aboutissement d'une vaste entreprise de formalisation, qui unifie et rend possible des résolutions économiques et analogues de tous les problèmes qui relèvent du linéaire. Encore faut-il donc, pour avoir accès à ces résolutions, maîtriser un certain degré de formalisme.* » (J.L. Dorier, 1997).

Nous relevons aussi les éléments suivants concernant l'apprentissage de l'algèbre linéaire en première année de DEUG. Des difficultés liées au formalisme sont repérées, notamment des difficultés liées aux manipulations formelles et à l'insuffisance des connaissances antérieures en logique et en théorie des ensembles. Une autre source de problèmes est que l'enseignement de l'algèbre linéaire est peu préparé dans l'enseignement secondaire. Enfin, une spécificité de cette théorie est que lorsque les étudiants accèdent à une certaine maîtrise du formalisme, l'algèbre linéaire devient un outil de résolution des problèmes qui relèvent du linéaire.

Des enquêtes menées auprès des étudiants, de 1987 à 1994, montrent que les principales difficultés des étudiants en algèbre linéaire sont révélatrices de l'obstacle du formalisme. Les enquêtes précisent la nature des difficultés rencontrées pour toutes les générations d'étudiants et pratiquement pour tous les modes d'enseignement. Elles mettent en évidence des difficultés « classiques » liées aux manipulations formelles mais elles montrent aussi comment l'insuffisance des connaissances en logique et en théorie des ensembles produit des erreurs en algèbre linéaire.

La première enquête est réalisée en octobre-novembre 1987. L'objectif est de cerner les connaissances et les conceptions des étudiants en algèbre linéaire, après une première année d'université. Des étudiants en deuxième année universitaire ont rempli un questionnaire avant tout nouvel enseignement d'algèbre linéaire. Les étudiants sont entre autre interrogés sur la façon dont ils perçoivent l'algèbre linéaire et sur les difficultés qu'ils rencontrent. Pour le premier point, la majorité des réponses décrivent des contenus mathématiques. Le caractère outil de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes dans différents cadres n'est jamais évoqué. Les concepts restent à l'état de concepts-objets. Les difficultés majeures sont liées à l'abstraction, aux difficultés à se représenter les notions, à la quantité de définitions et théorèmes nouveaux à comprendre et à apprendre mais aussi aux multiples démonstrations à produire avec la rigueur associée. Les étudiants mentionnent aussi des difficultés dues au langage et au formalisme utilisés. Nous notons aussi que les nouveaux objets introduits font simultanément intervenir le langage ensembliste, l'utilisation des quantificateurs et un grand nombre de définitions, ce qui accroît les problèmes de compréhension. En conclusion, « *pour une majorité d'étudiants, l'algèbre linéaire n'est qu'un catalogue de notions très abstraites qu'ils n'arrivent pas à se représenter ; de plus ils sont submergés sous une avalanche de mots nouveaux, de symboles nouveaux, de définitions nouvelles et de théorèmes nouveaux* » (J.L. Dorier, 1997).

Une seconde enquête est menée en 1990 dans une section de DEUG. Il s'agit cette fois d'analyser les contenus au niveau des types de tâches proposées et des procédures utilisées par les étudiants. Un autre objectif était de regarder l'évolution des connaissances en algèbre linéaire en fonction des connaissances en logique et en théorie des ensembles. Les résultats sont donnés en fonction des deux critères suivants : les tâches proposées aux étudiants et les difficultés des étudiants. En ce qui concerne les tâches, une première dichotomie est observée entre les tâches s'appliquant à des cadres extérieurs à l'algèbre linéaire où les concepts et les méthodes apparaissent comme un outil de résolution et les tâches se déroulant dans un cadre formel, mettant ainsi en évidence l'aspect objet des concepts. Pour le premier type de tâches, nous retrouvons des problèmes où l'outil linéaire mène à une résolution adaptée. Cependant, les énoncés proposés ne relèvent en général pas strictement de l'algèbre linéaire, et la réponse à y apporter non plus. Dans le second type de tâches proposées, nous retrouvons des problèmes plus théoriques où se développent des « techniques-objets » internes au cadre formel de l'algèbre linéaire. Une seconde dichotomie, non spécifique de l'algèbre linéaire, apparaît ensuite entre les tâches calculatoires ou algorithmiques et les tâches se plaçant à un niveau plus conceptuel. L'évolution des problèmes posés au cours de l'année montre que, si au départ les cadres des questions sont variés, ils deviennent au fil du temps de plus en plus formels. Parallèlement, les tâches proposées sont de plus en plus calculatoires. Nous notons aussi que le manquement de changements de cadres rend les possibilités de moyens de contrôle et de prise de sens assez limitées. Une difficulté supplémentaire est l'absence de « méthodes types » de résolution, ce qui donne parfois lieu à des propos incohérents ou absurdes. L'enquête visait aussi à pointer les difficultés des étudiants. Dans les problèmes posés dans un cadre externe à l'algèbre linéaire, les étudiants rencontrent deux obstacles : l'algèbre linéaire n'est pas un outil indispensable pour résoudre le problème, son utilisation ne correspond qu'à une obligation didactique. Ensuite, l'entrée dans le problème nécessite souvent l'utilisation de résultats préliminaires avant de faire intervenir l'outil linéaire. Or, ces résultats font appel à des techniques spécifiques que les étudiants ne maîtrisent pas. Pour les problèmes posés dans un cadre formel, d'autres difficultés apparaissent : les changements de cadres sont limités, les moyens de contrôle et les possibilités de prise de sens sont restreints. Enfin, pour les évolutions individuelles, nous retenons que la réussite en algèbre linéaire est corrélée aux connaissances antérieures en logique élémentaire : « *plus que des connaissances précises en logique, il semble que ce soit plutôt l'absence de lacunes dans les connaissances en logique qui soit le plus important dans le transfert sur la réussite en algèbre linéaire... ce n'est qu'au-delà d'un certain seuil global de connaissances en logique (le quantitatif), que ces connaissances sont mobilisables de façon effective et positive dans l'acquisition des concepts élémentaires d'algèbre linéaire (le qualitatif)* » (J.L. Dorier, 1997).

5.2 Un usage fonctionnel des symboles : un pas vers la conceptualisation

Le problème de l'acquisition des concepts topologiques rentre dans le cadre plus général de comprendre comment les étudiants peuvent s'approprier un nouvel objet mathématique. M. Berger (2004) étudie de quelle façon un étudiant en mathématiques, au niveau universitaire, donne du sens à un nouveau signe mathématique[9] qui lui est présenté sous la forme d'une définition. En particulier, l'auteur analyse comment s'effectue le passage entre la signification personnelle[10] qu'un étudiant accorde à un nouveau signe et la signification culturelle[11].

En reprenant les travaux de Vygotsky sur la façon dont un enfant apprend un nouveau mot, M. Berger soutient la thèse qu'un étudiant commence par utiliser un nouveau signe mathématique dans un but de communication, comme pour utiliser un nouveau mot, mais aussi comme un objet lui permettant d'organiser ses idées,

[9] L'auteur englobe sous ce terme un symbole mathématique, une expression, le nom d'un objet,...

[10] Par signification personnelle, nous entendons tout ce qui fait que l'étudiant pense, croît implicitement ou explicitement qu'il a compris le sens reconnu par la communauté scientifique d'un objet. Cela peut d'ailleurs être effectivement le cas.

[11] L'étudiant parvient à utiliser ce signe d'une façon qui s'avère être congruente avec l'usage qui en est reconnu par la communauté scientifique.

tout comme un mot, et ce avant qu'il en maîtrise complètement le sens. L'auteur défend l'idée que c'est grâce à un usage fonctionnel, c'est-à-dire par imitation, association et / ou manipulation, d'un nouveau signe que l'étudiant fait évoluer sa représentation personnelle du signe pour accéder au sens reconnu par la communauté mathématique.

L'analyse d'une interview montre comment un étudiant parvient à donner du sens à un nouveau signe particulier, l'intégrale impropre, grâce à un usage fonctionnel. Il s'agit d'un étudiant en mathématiques, en première année d'une université d'Afrique du Sud. Dans l'interview, une définition écrite de l'intégrale impropre est donnée à l'étudiant. Celui-ci doit réaliser certaines tâches faisant intervenir ce nouveau signe. L'étudiant a la possibilité, à sa demande, de consulter une référence standard sur le Calculus en première année universitaire. Sur la base de la définition, il est demandé à l'étudiant de produire ses propres exemples sur l'objet qui lui est présenté, puis il a à déterminer si des intégrales impropres convergent ou pas. Le livre de référence traite explicitement des exemples d'intégrales impropres convergentes ou non, et montre des représentations graphiques de l'intégrale impropre. La retranscription de l'interview montre que, dans un premier temps, l'étudiant est capable de travailler avec la définition de ce nouvel objet en procédant par association et par imitation de la définition. A ce stade, l'étudiant n'accorde pas encore de sens à l'intégrale impropre, tant d'un point de vue personnel que culturel. Ensuite, l'étudiant passe de productions erronées à des productions acceptables. En procédant par imitation, l'étudiant consulte les exemples traités dans le livre pour étudier la convergence des intégrales qui lui sont données. A cette étape, il parvient à donner du sens au nouvel objet qui lui a été introduit.

Cette recherche montre donc que le sens d'un nouveau signe mathématique peut évoluer, chez l'étudiant, grâce à la communication verbale ou écrite d'une part et d'autre part grâce à un usage fonctionnel (manipulation, imitation, association) de cet objet.

5.3 Technique et sens : une dynamique à ne pas négliger

Le problème de la « prise de sens » n'est pas récent et apparaît à tous les niveaux d'enseignement. D. Butlen et M. Pezard (1996) ont étudié les liens entre les compétences calculatoires, la construction de représentations d'un problème numérique et le traitement de celui-ci chez des élèves de la fin de l'école élémentaire. Les auteurs regardent comment et sous quelles conditions une pratique régulière du calcul mental peut améliorer les performances des élèves dans la résolution de problèmes. Ils émettent l'hypothèse que la pratique régulière du calcul mental diminue le coût mental des opérations et permet d'augmenter les performances dans la résolution de problèmes.

Des tests comparatifs sont organisés dans des classes entraînées et des classes non entraînées. Les résultats de l'expérience montrent que la pratique régulière du calcul mental favorise la « prise de sens » des élèves, un effet qui se trouve renforcé par l'institutionnalisation. Ainsi, le travail de la technique fait effectivement progresser le conceptuel. Cependant, il ne faut négliger ni l'un ni l'autre. Or, dans un enseignement ordinaire, où le choix d'enseignement est la progressivité des contenus, la technique a tendance, au fil du temps, à être sous-estimée.

Les recherches menées ont montré que la dynamique entre le sens et la technique est nécessaire. Par analogie, nous pensons que la dynamique entre le formel et le conceptuel est sans doute, elle aussi, indispensable. On peut d'ailleurs se demander si un enseignement où on privilégie le formel sur le conceptuel ne s'avèrera pas inefficace chez certains étudiants. Nous faisons l'hypothèse que c'est en faisant travailler l'étudiant à un niveau qui n'est pas exclusivement formel qu'il parvient à manipuler les objets dans différents cadres et à les conceptualiser, avec l'aide de l'enseignant.

6 Pistes de travail, méthodologie

Nous avons choisi d'interpréter les concepts topologiques en termes de notions FUG. Notre travail consiste à utiliser cette interprétation pour étudier les spécificités de ces concepts et pour analyser leurs difficultés d'enseignement en termes de formalisation et de conceptualisation. Nous procédons en deux étapes :

① dresser un état des lieux de notre enseignement en établissant sur le chapitre concernant la topologie un diagnostic tant dans le cours théorique que dans les exercices que nous proposons aux étudiants,

② élaborer un questionnaire à proposer aux étudiants de seconde année ayant pour but de tester leurs acquis topologiques de première année. Nous nous plaçons donc, de ce point de vue, du côté des apprentissages.

6.1 L'enseignement

▸▸ Le cours théorique

L'analyse du cours théorique vise à situer les concepts topologiques dans le paysage mathématique des étudiants et d'en comprendre les grandes dynamiques. Comme nous l'avons expliqué précédemment, l'enseignement d'une notion FUG présente des difficultés d'introduction notamment liées au manque de liens avec les connaissances antérieures. L'interprétation des concepts topologiques en termes de FUG nous amène donc à étudier les questions suivantes :

- □ À quel moment du cours et de l'année les concepts topologiques sont-ils introduits ?
- □ Les étudiants disposent-ils de connaissances antérieures en topologie ou bien s'agit-il, pour eux, de concepts complètement nouveaux ?
- □ Comment les concepts topologiques sont-ils introduits ?
- □ Les concepts topologiques sont-ils utilisés dans la suite du cours et si oui, comment ?

Pour mener cette analyse, nous disposons du syllabus du cours et des notes d'un étudiant qui a suivi le cours en 2002-2003. Dans un premier temps, nous regardons le syllabus. Il s'agit d'un support théorique permettant aux étudiants de compléter les notes prises au cours. La table des matières renseigne sur l'ordre chronologique des sujets abordés. Cependant, il existe des variantes entre le contenu du syllabus et ce qui est présenté au cours. Par exemple, au sein d'un même chapitre, il est possible que le professeur présente, pendant la séance, les concepts dans un ordre différent de celui du syllabus. D'autre part, le syllabus contient davantage que ce qui développé au cours. Toutes les propriétés y sont démontrées et certains résultats y sont mentionnés alors qu'ils ne sont pas développés au cours. Les évaluations ne portent que sur ce qui est effectivement abordé au cours théorique. Nous présentons, dans l'annexe D, les notes d'un étudiant sur le chapitre intitulé « Topologie ». Ces notes[12] nous permettront de connaître l'ordre exact dans lequel les concepts sont introduits et comment ils le sont. Elles nous renseigneront aussi sur les exemples fournis, sur ce qui est démontré par l'enseignant et sur ce qui est laissé à la charge de l'étudiant (une démonstration laissée en suspens, l'étude de la réciproque d'un résultat,...).

▶▶ Les exercices

Par le fait que nous avons la charge des séances de travaux dirigés, nous disposons d'un corpus d'exercices à analyser.

Pour étudier ce que produit l'interprétation FUG des concepts topologiques dans les exercices, nous procédons à une analyse de tâches[13] à partir des énoncés proposés aux étudiants. Ces analyses ont pour but de renseigner sur les activités potentielles[14] des étudiants et en particulier sur la façon dont ils sont amenés à manipuler les concepts dans les exercices.

Nous présentons ci-dessous nos axes d'analyse des énoncés. Nous utilisons les outils d'analyse des contenus proposés par A. Robert (1998). Six axes d'analyse de tâches sont développés, allant du général au particulier. Les deux premiers axes sont globaux, les trois suivants sont des axes locaux d'analyses a priori et le dernier est un axe d'analyse a posteriori. Dans ce travail, nous travaillons avec les deux axes suivants :

- □ l'axe 3 : l'analyse des tâches a priori,
- □ l'axe 4 : l'analyse des activités[15] des élèves a priori,

Ce sont des analyses a priori. Nous ne regardons pas, dans ce travail, le déroulement effectif en classe mais, de façon empirique, nous supposons qu'il ne ferait

[12] Il s'agit des notes d'un étudiant sérieux, qui assiste à tous les cours et dont les résultats sont très bons. Elles sont donc fiables.

[13] Tâches : ce qui est à mettre en oeuvre du point de vue mathématique. Elles sont souvent analysées a priori à partir d'énoncés.

[14] Il s'agit des activités qui peuvent se réaliser.

[15] Activités : ce qui est à mettre en oeuvre du côté de l'élève. Elles sont associées à ce que font les élèves pour résoudre une tâche.

que renforcer les analyses a priori. Ces axes sont présentés sous la forme d'une suite de questions que nous indiquons dans l'annexe C. Les analyses consistent à y apporter des réponses. Dans cette série de questions, nous relevons plus particulièrement les critères suivants qui, compte tenu de notre choix théorique, sont susceptibles de dégager des traits particuliers du travail sur les concepts topologiques :

- le caractère outil / objet des notions à utiliser,
- le rôle spécifique du formalisme,
- l'utilisation de connaissances anciennes ou en cours d'acquisition,
- les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances,
- les types de raisonnements mis en jeu,
- les adaptations à effectuer pour résoudre la tâche. Dans (Robert, 2005), six types d'adaptations sont dégagés, pouvant intervenir simultanément :
  - A1. *Les reconnaissances des modalités d'application* des notions, théorèmes, méthodes, formules,...
  - A2. *L'introduction d'intermédiaires* tels que des points, des notations, des expressions,...
  - A3. *Les mélanges* de plusieurs cadres ou notions, les *changements* de points de vue, de cadres ou de registres, les *mises en relation* ou *interprétations*.
  - A4. *L'introduction d'étapes, l'organisation* des calculs ou des raisonnements. Les étapes peuvent être classiques ou à imaginer.
  - A5. *L'utilisation de questions précédentes* dans un problème.
  - A6. *L'existence de choix*, forcés ou non.
- les moyens de contrôle.

Ces analyses ont aussi pour objectif de dégager d'éventuelles régularités dans les tâches à réaliser. Plus précisément, nous cherchons à repérer si certaines activités se répètent fréquemment et si les exercices proposés font intervenir les mêmes niveaux de mises en fonctionnement des connaissances. Nous pensons que ces régularités, si elles existent, mettent également en évidence des spécificités du travail proposé sur les concepts topologiques qui peuvent être mises en relation avec leur interprétation FUG.

6.2 Les apprentissages

En nous appuyant sur les analyses précédentes, nous nous proposons, dans la suite de notre travail, d'analyser ce que les étudiants réalisent avec les concepts enseignés au terme de leur première année universitaire. Notre objectif, dans cette partie du travail, est d'utiliser l'interprétation FUG des concepts topologiques pour analyser leurs difficultés d'apprentissage.

La question de la maîtrise des connaissances est abordée dans les recherches menées sur l'enseignement de l'algèbre linéaire en première année d'université (J.L. Dorier, 1997). Ce domaine semble avoir des similitudes avec les concepts topologiques. En effet, les recherches montrent notamment que les concepts de l'algèbre linéaire sont de nature FUG et que leur maîtrise requiert des prérequis en logique et en théorie des ensembles.

Dans (Dorier, 1997), des questionnaires sont proposés à des étudiants en deuxième année d'université pour tester leurs connaissances et leurs conceptions en algèbre linéaire. D'où l'idée de nous inspirer de ces enquêtes pour étudier ce que nos étudiants de deuxième année ont gardé de leur enseignement de topologie de première année et comment ils perçoivent cette discipline.

▸▸ Elaborer notre questionnaire

Dans la première enquête sur l'algèbre linéaire, réalisée auprès d'étudiants de deuxième année, toutes les questions portent sur les supposés acquis de la première année. Cette enquête est présentée dans l'annexe E. Nous expliquons ici comment nous nous sommes inspirée de ce questionnaire sur l'algèbre linéaire pour élaborer un questionnaire portant sur les concepts topologiques.

Comme dans l'enquête sur l'algèbre linéaire, nous conservons tout d'abord l'idée de nous centrer sur ce qui a été abordé en première année et par conséquent, de ne pas interférer avec les concepts topologiques étudiés en deuxième année.

Dans le questionnaire sur l'algèbre linéaire, nous remarquons que certaines questions peuvent facilement se transposer aux concepts topologiques et que de plus, elles sont en relation avec notre travail. A la question 2, les étudiants doivent fournir des exemples d'espaces vectoriels, ce qui permet de préciser leurs références pour ce type d'espaces. Pour notre questionnaire, nous retenons l'idée de demander aux étudiants des exemples qui, dans notre cas, seraient des exemples d'ensembles ouverts et des exemples d'ensembles fermés. Différents exemples seraient à fournir dans $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^N$, de façon à analyser comment les étudiants maîtrisent la nature d'un même objet dans différents espaces. Dans le questionnaire sur l'algèbre linéaire, les deux dernières questions sont des questions plus générales demandant aux étudiants d'expliquer à un étudiant de DEUG en quoi consiste l'algèbre linéaire et quelles difficultés ils rencontrent dans ce domaine. Nous y apportons les modifications suivantes pour les adapter à la topologie :

- □ Si un étudiant de première candidature[16] vous demande en quoi consiste la topologie, que lui répondez-vous ?
- □ Quelles sont, pour vous, les difficultés de ce domaine des mathématiques ?

Les autres questions sur l'algèbre linéaire ne sont pas directement transposables à la topologie mais nous reprenons néanmoins les idées suivantes pour construire nos propres questions. Nous proposons une question plus formelle, comme dans la question 1 du questionnaire sur l'algèbre linéaire, pour observer

[16] Nom de la première année d'université en Belgique.

comment les étudiants manipulent le formalisme. Une question de type vrai / faux est aussi incorporée pour tester l'argumentation des étudiants.

Une difficulté des concepts topologiques réside dans le formalisme qu'ils font intervenir. Nous ajoutons donc une question où nous demandons aux étudiants les définitions d'ensembles ouverts, fermés dont ils se souviennent. Nous posons alors une question où les étudiants ont à travailler sur les définitions, ce qui nous renseigne sur la manipulation du formalisme en lien avec la conceptualisation des objets.

Nous ajoutons une question nécessitant l'utilisation d'une technique fréquemment utilisée en analyse : le passage au complémentaire.

En ce qui concerne l'ordre des questions, nous gardons la même disposition que pour le questionnaire sur l'algèbre linéaire, à savoir commencer par les questions mathématiques pour terminer par les questions générales. Par contre, le questionnaire sera anonyme, pour éviter aux étudiants de penser qu'il s'agit d'une évaluation. Notre questionnaire et ses résultats sont présentés au chapitre III.

▸▸ Analyser notre questionnaire

Notre questionnaire porte sur les concepts topologiques étudiés en première année. Tous les arguments justificatifs, les techniques et les résultats à utiliser pour répondre aux questions ont donc été abordés l'année précédente.

Pour analyser le rapport entre la formalisation et la conceptualisation des concepts topologiques et essayer de les mettre en relation avec leur interprétation FUG, nous nous intéressons aux questions suivantes :

- □ Les connaissances (a priori peu stables) acquises en première année sont-elles disponibles et par conséquent, à quelle conceptualisation notre enseignement de première année a-t-il mené ?

  En particulier, nous serons en mesure d'étudier si les étudiants sont capables de restituer les définitions de notions qui ne sont pas encore des outils. Nous faisons l'hypothèse que cette restitution témoigne d'un début de conceptualisation. En effet, dans la mesure où nous avons des notions FUG, le fait de donner une définition correcte peut, selon nous, être assimilé à un début d'apprentissage. Dans le même ordre d'idées, la capacité à fournir des exemples peut, elle aussi, être associée à un début de conceptualisation.

- □ Quelles sont les difficultés mais aussi les types d'erreurs rencontrés ?

  Nous savons que, pour une notion FUG, le rapport aux connaissances antérieures est difficile à établir. Nous pouvons donc nous demander si les problèmes rencontrés dans les productions d'étudiants sont réellement liés à des problèmes de compréhension des concepts topologiques ou bien s'ils portent davantage sur des connaissances antérieures ? En particulier, des difficultés à manipuler correctement les écritures quantifiées et la théorie des ensembles pourraient apparaître.

- □ Les techniques rencontrées l'année précédente, soit dans des démonstrations, soit dans la résolution d'exercices, sont-elles mobilisables et / ou disponibles ?

- □ Comment les arguments justificatifs et les enchaînements logiques qui interviennent dans la résolution d'exercices sont-ils rédigés ?

Dans l'analyse des réponses des étudiants, nous devons aussi tenir compte du fait suivant : depuis le début de la deuxième année, les étudiants « baignent » dans la topologie (au moment où se déroule le test, les étudiants travaillent cette discipline depuis trois mois) mais dans le cadre plus abstrait des espaces topologiques. Le questionnaire peut donc montrer aussi comment les étudiants se replongent dans l'espace $\mathbb{R}^N$ et s'ils utilisent ce qui a été abordé en deuxième année pour répondre aux questions.

Chapitre II

Analyse de l'enseignement : le cours théorique, les exercices

1 Le cours théorique

1.1 Objectifs et « philosophie » du cours

De notre point de vue d'enseignant[1], le cours d'analyse, en première année, doit permettre aux étudiants d'atteindre les objectifs suivants :

- comprendre les concepts et les outils fondamentaux présentés dans le cours,
- acquérir une certaine autonomie,
- être capable de manipuler le formalisme et le mettre en rapport avec des données plus intuitives (dessins, esquisses de calculs,...),
- développer une certaine abstraction par rapport aux notions étudiées.

Comme nous l'avons expliqué au chapitre I, nous sommes très sensibles aux difficultés des étudiants qui entrent en première année d'université. Nous savons notamment qu'ils ne sont pas du tout familiers avec les écritures quantifiées ni avec le formalisme associé. Pour tenter de remédier à cette situation, nous organisons un cours intitulé « mathématiques élémentaires ». Celui-ci a lieu pendant les six premières semaines de l'année, c'est-à-dire avant que le cours d'analyse ne démarre. Le cours[2] porte sur les notions mathématiques que nous considérons comme des prérequis pour aborder les cours d'une première année universitaire. Certaines de ces notions ont déjà été abordées dans l'enseignement secondaire, d'autres pas du tout. C'est le cas des écritures quantifiées. Nous y consacrons néanmoins quelques séances où nous présentons les quantificateurs universels et existentiels. Nous faisons alors travailler les étudiants sur des écritures simples

[1] Nous parlons ici au nom de l'équipe d'enseignants qui participent à l'enseignement de l'analyse en première année. Nos propos sont donc ceux de l'enseignant, ils peuvent paraître évidents, voire « naïfs » aux yeux du didacticien.

[2] Une table des matières détaillée est disponible à l'adresse suivante :
`http://math.umh.ac.be/an/indexch2.php`

pour qu'ils se familiarisent avec l'organisation logique que requiert la manipulation d'une écriture quantifiée. Cette partie est suivie d'une courte introduction à la théorie des ensembles et à la logique élémentaire.

Malheureusement, notre expérience d'enseignant nous autorise à affirmer que cette tentative de préparation aux autres cours n'est pas fructueuse. En effet, ces quelques séances sur les quantificateurs sont insuffisantes pour que les étudiants parviennent à manipuler correctement les écritures quantifiées. Lorsque le cours d'analyse démarre, les étudiants ont beaucoup de difficultés à manipuler le nouveau formalisme qui leur est introduit. Nous devons donc progresser dans le cours avec des bases qui sont très instables. A ces difficultés viennent s'ajouter des problèmes de rédaction et d'argumentation logique.

Pour que les étudiants parviennent tout de même à améliorer leur compréhension des concepts enseignés et à acquérir une certaine autonomie dans leur travail, nous faisons le choix de leur imposer de rédiger tous les détails de calculs et tous leurs enchaînements logiques, en énonçant à chaque étape les résultats utilisés. Autrement dit, nous leur demandons d'aller jusqu'au bout des détails. Nous pensons que cet effort incite les étudiants à s'interroger sur ce qu'ils écrivent. Une rédaction détaillée leur permet de faire des allers-retours entre ce qu'il leur est demandé et ce qu'ils écrivent pour arriver au bout de leur production. Nous sommes aussi conscients que ce choix risque de faire perdre à l'étudiant le fil de son raisonnement en se noyant dans des calculs mais c'est un risque que nous prenons.

1.2 Place des concepts topologiques dans le cours

L'introduction à la topologie de $\mathbb{R}^N$ est présentée au mois de février, c'est-à-dire au début du second semestre de cours. A cette époque de l'année, les sujets suivants ont été abordés :

- la convergence des suites de nombres réels,
- les notions de supremum et d'infimum d'un ensemble,
- la notion de norme,
- la convergence des suites vectorielles,
- les limites et la continuité de fonctions.

Les étudiants ont eu une évaluation en janvier portant sur ces sujets. Nous donnons dans l'annexe B une table des matières détaillée du cours d'analyse. Celle-ci a été reprise dans le syllabus du cours.

La topologie de $\mathbb{R}^N$ n'a pas du tout été abordée dans l'enseignement secondaire. De plus, comme nous l'avons expliqué ci-dessus, même si nous faisons un peu travailler les étudiants sur les écritures quantifiées dans notre cours de mathématiques élémentaires, notre tentative de remédiation est d'une part infructueuse et d'autre part, les étudiants y sont amenés à travailler sur des écritures portant sur les nombres réels[3] et pas sur les objets apparaissant dans les concepts topolo-

[3] Voici un exemple d'exercice proposé aux étudiants : La proposition $\forall x \in \mathbb{R}, (\forall \varepsilon > 0, |x^3 - x| < \varepsilon) \Rightarrow (x = 0)$ est-elle vraie ? Si oui, prouvez la. Dans le cas contraire, donnez un contre-exemple.

giques (boules, suites,...). Nous ne pouvons donc pas considérer que les étudiants ont des connaissances antérieures en topologie. Tout ce qui est défini est neuf pour eux.

La topologie est introduite sans réelle continuité avec les chapitres précédents. Les concepts topologiques sont introduits par leurs définitions et ces définitions sont ensuite utilisées pour démontrer une série de propriétés. Nous donnons ci-dessous le plan de ce qui est abordé dans ce chapitre.

▸▸ Plan du cours

- □ Intérieur, adhérence d'un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}\operatorname{int}A &= \{x \in \mathbb{R}^N : \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A\}\\ &= \{x \in \mathbb{R}^N : \forall (x_n) \subseteq \mathbb{R}^N,\ (x_n \to x) \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ x_n \in A)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{adh}A &= \{x \in \mathbb{R}^N : \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing\}\\ &= \{x \in \mathbb{R}^N : \exists (x_n) \subseteq A,\ x_n \to x\}\end{aligned}$$

  L'équivalence des définitions en termes de boules et de suites est démontrée.
  La propriété suivante est démontrée : $\operatorname{int}A \subseteq A \subseteq \operatorname{adh}A$.

- □ Ensemble ouvert, fermé
  A est ouvert ssi $A = \operatorname{int}A$,
  ssi $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$,
  ssi $\forall x \in A,\ \forall (x_n) \subseteq \mathbb{R}^N,\ (x_n \to x) \Rightarrow (\exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ x_n \in A)$.

  A est fermé ssi $A = \operatorname{adh}A$,
  ssi $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \Rightarrow (x \in A)$,
  ssi $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ \forall (x_n) \subseteq A,\ (x_n \to x) \Rightarrow (x \in A)$.
  L'équivalence des définitions est démontrée.

- □ Propriété de dualité : $\operatorname{adh}A = \complement \operatorname{int} \complement A$ et $\operatorname{int}A = \complement \operatorname{adh} \complement A$.
  Corollaire : A est ouvert ssi $\complement A$ est fermé.

- □ Les propriétés suivantes sont démontrées :
  - $\operatorname{int}(\operatorname{int}A) = \operatorname{int}A$
  - $\operatorname{adh}(\operatorname{adh}A) = \operatorname{adh}A$
  - $\operatorname{int}A$ est un ensemble ouvert.
  - $\operatorname{adh}A$ est un ensemble fermé.

- □ Union et intersection : on étudie le comportement d'une famille d'ensembles $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ vis à vis de ces deux opérations. On démontre que
  - $\operatorname{int}(\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha) \supseteq \bigcup_{\alpha \in A} \operatorname{int}E_\alpha$
  - $\operatorname{int}(\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} \operatorname{int}E_\alpha$ et on a l'égalité si A est fini.
  - $\operatorname{adh}(\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} \operatorname{adh}E_\alpha$
  - $\operatorname{adh}(\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha) \supseteq \bigcup_{\alpha \in A} \operatorname{adh}E_\alpha$ et on a l'égalité si A est fini.

Des exemples sont donnés dans les cas où les inclusions ne sont pas toujours vérifiées.

Les deux corrolaires suivants sont donnés :

- Si $(O_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une famille d'ouverts, alors
  - ➪ $\bigcup_{\alpha\in A} O_\alpha$ est ouvert,
  - ➪ $\bigcap_{\alpha\in A} O_\alpha$ est ouvert si A est fini.
- Si $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une famille de fermés, alors
  - ➪ $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$ est fermé,
  - ➪ $\bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha$ est fermé si A est fini.

Ce plan a été établi en suivant le syllabus du cours[4]. Pendant les séances du cours théorique, le professeur est susceptible d'y apporter des modifications : l'ordre dans lequel les notions sont présentées peut notamment varier, tous les résultats ne seront peut-être pas démontrés et les exemples peuvent changer par rapport à ceux donnés dans le syllabus.

▸▸ Notes d'un étudiant

Pour connaître ce qui est effectivement réalisé dans ce chapitre, nous avons regardé les notes d'un étudiant. Celles-ci sont présentées dans l'annexe D. Nous commentons ci-dessous le cheminement suivi dans les notes de cet étudiant.

La topologie est motivée par des questions mettant en rapport les ensembles avec les limites de suites. Les définitions d'intérieur et d'adhérence sont d'abord données en termes de suites. Sur la base de ces définitions, on prouve la propriété « $\operatorname{int} A \subseteq A \subseteq \operatorname{adh} A$ ». Viennent ensuite les définitions en termes de boules. L'équivalence des définitions en termes de suites et de boules est démontrée.

Un ensemble A est ouvert (respectivement fermé) si $A = \operatorname{int} A$ (respectivement $A = \operatorname{adh} A$). Compte tenu des définitions d'intérieur et d'adhérence précédentes, les définitions d'ouvert et de fermé sont traduites en termes de suites et de boules.

Les exemples suivants sont mentionnés :

- □ Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et $c \in \mathbb{R}$, alors $\{x \in [a,b] : f(x) \leqslant (\geqslant) c\}$ est fermé.
- □ Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors $\{x : f(x) > 0\}$ est ouvert et un dessin illustre cette situation.

La notion de voisinage est définie. La propriété $\complement \operatorname{int} \complement A = \operatorname{adh} A$ et son corrolaire sont démontrés.

L'ensemble vide et $\mathbb{R}^N$ apparaissent comme des exemples d'ensembles qui sont à la fois ouverts et fermés. La question de savoir si ce sont les seuls est posée mais non résolue.

Les propriétés $\operatorname{int}\operatorname{int} A = \operatorname{int} A$ et son homologue pour l'adhérence sont démontrées ainsi que leurs corollaires.

[4]Le syllabus est disponible à l'adresse suivante :
`http://math.umh.ac.be/an/analyseI.php`

▶▶ Après le cours

Les concepts topologiques ne sont pas réinvestis dans la suite du cours. Comme nous l'avons expliqué au chapitre I, ce choix de contenu se justifie par le fait que la topologie dans $\mathbb{R}^N$ est la base du cours d'analyse en deuxième année pour la section mathématique. Notre objectif d'enseignant y est de présenter les objets et de faire travailler les étudiants sur les définitions introduites. Les concepts topologiques réapparaissent dans une brève introduction à la compacité où là aussi, les objets sont présentés sur la base de leurs définitions. Les notions d'ouvert, de fermé, d'intérieur et d'adhérence interviennent occasionnellement dans le cours dans des hypothèses de théorèmes démontrés dans le cadre de la dérivabilité, les développements de Taylor,...

1.3 Synthèse

L'analyse de notre enseignement théorique met en évidence l'isolement des concepts topologiques au sein du cours : leur introduction n'est pas réellement motivée, ils n'ont pas lien avec des connaissances antérieures en topologie et ils ne sont pas retravaillés par la suite. Ces concepts ont donc un caractère objet, ils n'apparaissent pas comme un outil dans le cours théorique.

Les concepts sont introduits « brutalement » par leurs définitions et celles-ci sont écrites dans un formalisme nouveau pour les étudiants. Elles sont de plus variées puisque des objets tels que les suites et les boules apparaissent. Ces définitions sont utilisées pour démontrer des propriétés sur les notions d'intérieur, d'adhérence, d'ouvert et de fermé. Leur fonction est donc « manipulatoire ». Cette manipulation nécessite une incursion dans les cadres de la logique élémentaire et de la théorie des ensembles (présence d'inclusions et d'intersections d'ensembles, d'implications). Or, nous avons expliqué au début de ce chapitre que les connaissances nécessaires pour travailler dans ces deux cadres ne sont pas disponibles chez les étudiants.

Cette analyse nous a donc conforté dans l'idée d'interpréter les concepts topologiques comme des notions FUG. De plus, les connaissances qui sont supposées disponibles pour utiliser ces concepts dans les exercices laisse présager des difficultés chez les étudiants.

2 Les exercices

2.1 Les énoncés

Voici la liste des exercices qui sont proposés aux étudiants. Nous présentons ensuite les analyses a priori de quelques énoncés.

1. Montrez, en utilisant les définitions d'ensemble ouvert données, que $]a,b[$ est ouvert.

2. $\{2\}$ est-il un ensemble ouvert ?

3. $[0,1]$ est-il ouvert ?
4. Montrez, en utilisant les définitions d'ensemble fermé données, que $[-1,4]$ est fermé.
5. $]0,3]$ est-il fermé ?
6. Montrez que $\text{adh}]-3,5[=[-3,5]$.
7. Les ensembles $\mathbb{R}, \varnothing, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ sont-ils ouverts ? Fermés ? Justifiez en détail.
8. $\{(a,b)\}$ est-il fermé ? Ouvert ?
9. Montrez que $B_{|.|_2}[(-2,1),3]$ est un ensemble fermé.
10. Montrez que $B_{|.|_2}\big((-2,1),3\big)$ est un ensemble ouvert.
11. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Posons $E=\{x\in\mathbb{R}: f(x)\leqslant 4\}$. Montrez que E est fermé.
12. Les ensembles suivants sont-ils ouverts ? Fermés ? Justifiez en détail vos affirmations.
    - □ $A_1=\{x\in\mathbb{R}: x^2<x\}$
    - □ $A_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 4x-y=5\}$
    - □ $A_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\leqslant x<y\}$
    - □ $A_4=\{(x,x^3): x\in\mathbb{R}\}$
    - □ $A_5=\{(x,y): |x|\leqslant 1\}$
    - □ $A_6=\{1/n: n\in\mathbb{N}_0\}$
13. Montrez que $[-1,2]\times[-4,-3]$ est un ensemble fermé.
14. Si O est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et si F est un fermé de $\mathbb{R}^N$, alors montrez que $O\backslash F$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$.
15. Soit $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, avec $a_n\neq 0$ et $\forall i=0,\dots,n,\ a_i\in\mathbb{R}$. Posons

$$\begin{aligned} E &= \{x\in\mathbb{R}: p(x)=0\}\\ F &= \{x\in\mathbb{R}: \sin x\neq 0\}\\ G &= \{x\in\mathbb{R}: p(x)\sin x\neq 0\}\end{aligned}$$

    L'ensemble G est-il ouvert ?

2.2 Analyse des énoncés

Pour chaque exercice analysé, nous commençons par résoudre effectivement l'exercice en envisageant les solutions possibles. Ensuite, nous procédons à l'analyse de chaque solution en utilisant les axes d'analyse de tâches (A. Robert, 1998) présentés dans la méthodologie (chapitre I, section 6).

▶▶ Remarques préliminaires

Compte tenu de nos choix d'enseignement exposés précédemment, les solutions des exercices sont rédigées avec le même souci de détails que nous imposons aux étudiants, pour étudier précisément ce qu'ils sont amenés à travailler.

Comme nous l'avons expliqué dans l'analyse du cours théorique, les exercices visent à faire travailler les étudiants sur les définitions et à manipuler correctement le formalisme introduit.

Les exercices 1 jusqu'à 7 font travailler dans $\mathbb{R}$ pour passer ensuite, dans les exercices 8 à 11, à $\mathbb{R}^2$. Dans les exercices 1 et 4, l'étudiant doit utiliser toutes les définitions du cours. Par contre, dans les autres exercices, l'étudiant a à sa charge de choisir la définition qu'il souhaite, ce qui implique peut-être une difficulté dès le départ de l'énoncé. D'autre part, nous ne disposons pas de suffisamment de temps pour corriger chaque exercice en manipulant toutes les définitions. Parfois, c'est l'enseignant qui choisit à la place de l'étudiant d'utiliser une définition plutôt qu'une autre. Par exemple, à l'exercice 11, la seule méthode présentée est d'utiliser la définition d'ensemble fermé en termes de suites. De manière générale, cette définition est plus fréquemment utilisée pour manipuler les ensembles fermés alors que la définition en termes de boules est davantage employée pour les ensembles ouverts. L'exercice 12 est en quelque sorte une synthèse de ce qui a été fait avant puisqu'il requiert, au départ, de pouvoir dire si les ensembles sont ouverts ou non, fermés ou non, et ensuite de le montrer. Le seul exercice où on se place dans $\mathbb{R}^N$ est l'exercice 14.

Les exercices font donc surtout travailler les étudiants dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$.

▶▶ Exercice 1

Solutions possibles

À partir des définitions présentées dans le plan du cours (paragraphe 1.2 de ce chapitre), il s'agit de montrer les trois propositions suivantes :

① $]a,b[= \mathrm{int}]a,b[$

② $\forall x \in]a,b[,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq\ ]a,b[$

③ $\forall x \in]a,b[,\ \forall (x_n) \subseteq \mathbb{R},\ (x_n \to x) \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ x_n \in]a,b[)$

Pour ①, il suffit de montrer que $]a,b[\subseteq \mathrm{int}]a,b[$ puisque l'autre inclusion est toujours vérifiée. Soit $x \in]a,b[$. Prenons $r = \min\{x-a, b-x\}$. Alors, on a $B(x,r) \subseteq]a,b[$. En effet, soit $y \in B(x,r)$. Si $r = x-a$, alors on a $|y-x| < x-a$, c'est-à-dire $a-x < y-x$ et $y-x < x-a$. La première inégalité donne $a < y$ et puisque $x-a < b-x$, on déduit de la seconde inégalité que $y < b$. Si $r = b-x$, on montre de manière analogue que $a < y < b$. On obtient donc que $y \in]a,b[$ et par conséquent, on a bien $x \in \mathrm{int}]a,b[$.

Pour ②, nous remarquons que cette définition peut encore s'écrire : $\forall x \in]a,b[,\ x \in \mathrm{int}]a,b[$. Nous sommes donc ramenée au point ①.

Pour ③ : soient $x \in]a,b[$ et une suite $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$. Supposons que $x_n \to x$. Prenons, dans la définition de convergence, $\varepsilon = \min\{x-a, b-x\}$. Alors, il existe

$n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_1,\ x_n \in B(x,\varepsilon)$. En choisissant $n_0 = n_1$, on a bien que $\forall n \geqslant n_0,\ x_n \in\,]a,b[$ puisque nous avons montré en ① que $B(x,\varepsilon) \subseteq\ ]a,b[$.

Analyse de l'énoncé

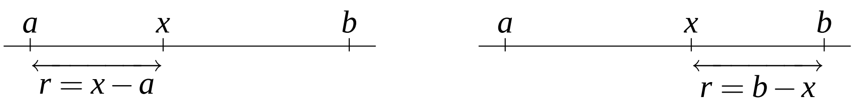
La question est fermée et la méthode est indiquée. On demande d'appliquer et d'utiliser successivement les définitions d'ensemble ouvert rencontrées au cours théorique. Nous remarquons que, pour écrire les trois définitions, il y a lieu *d'adapter* les définitions du cours en y *remplaçant* le nom de l'ensemble par $]a,b[$ et $\mathbb{R}^N$ par $\mathbb{R}$ (*reconnaissance des modalités d'application des formules*).

□ Définition ① :

Il s'agit de prouver une égalité entre deux ensembles. Nous sommes donc dans le *cadre de la théorie des ensembles*. On commence par *traduire* cette égalité en les deux inclusions $]a,b[\ \subseteq\ \mathrm{int}]a,b[$ et $\mathrm{int}]a,b[\ \subseteq\ ]a,b[$. La production demandée à l'étudiant est donc une démonstration mettant en jeu un *raisonnement ensembliste* qui contiendra (au moins) deux étapes imposées.

La seconde inclusion est immédiate (*reconnaissance de la propriété* « $\mathrm{int}E \subseteq E$ »).

La première inclusion nécessite *l'introduction d'un point intermédiaire* : on se donne un élément x dans $]a,b[$ et on prouve que x appartient aussi à $\mathrm{int}]a,b[$ (*reconnaissance des modalités d'application pour prouver une inclusion d'ensembles*). Le fait que le point x soit dans $\mathrm{int}]a,b[$ se traduit formellement par $\exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq\ ]a,b[$. A partir d'ici, *plusieurs étapes* sont à envisager. Tout d'abord, il y a lieu de *reconnaître* la nature d'une boule dans $\mathbb{R}$: $B(x,r)$ est un intervalle ouvert centré en x, c'est-à-dire $]x-r,x+r[$ (*reconnaissance de la définition de boule*). L'étape suivante consiste à trouver une valeur possible pour r (*choix à effectuer*). On peut *conjecturer* une valeur pour r à l'aide d'un *dessin* semblable à celui ci-dessous :



L'observation graphique permet de *choisir* $r = \min\{x-a, b-x\}$ (*travail sur l'ordre dans* $\mathbb{R}$). Il reste maintenant à prouver que $B(x,r) \subseteq\ ]a,b[$. Le mode d'organisation est le suivant : on considère un point $y \in B(x,r)$ et on montre que $y \in\ ]a,b[$ (*un nouvel intermédiaire est introduit*). Ces deux informations se traduisent de la façon suivante : on a $|y-x| < \min\{x-a, b-x\}$ et on doit montrer que $a < y < b$ (*mise en jeu d'une technique locale liée à l'ordre sur* $\mathbb{R}$ *: la manipulation d'inégalités*). Deux cas sont à envisager selon que $r = x-a$ ou $r = b-x$. L'étudiant doit faire appel aux propriétés de la valeur absolue et plus précisément, à la résolution d'une inéquation de la forme $|\xi| \leqslant \alpha$ (*mise en jeu de connaissances antérieures*) et utiliser le fait que $x-a < b-x$ si $r = x-a$ (*mise en jeu d'un travail sur l'ordre*) pour en déduire que $y \in\,]a,b[$. Une dernière étape consiste à revenir au fait que tous ces calculs montrent l'inclusion $B(x,r) \subseteq\ ]a,b[$, ce qui achève la démonstration.

□ Définition ② :

Un *lien* est à établir avec ce qui a été fait précédemment pour éviter de résoudre deux fois le même exercice.

L'étudiant a à sa charge d'*interpréter* cette définition en utilisant la notion d'intérieur et de faire le lien avec le point précédent.

□ Définition ③ :

Il s'agit de montrer que l'écriture quantifiée suivante est vérifiée :

$$\forall x \in]a,b[, \forall (x_n) \subseteq \mathbb{R}, (x_n \to x) \Rightarrow (\exists n_0, \forall n \geqslant n_0,\ x_n \in]a,b[).$$

Une *organisation logique* est à prévoir pour montrer ce type d'écriture : on se donne un élément x dans $]a,b[$ et une suite arbitraire (x_n) de réels. En supposant que (x_n) converge vers x, le problème consiste à trouver un indice n_0 à partir duquel les éléments x_n seront dans $]a,b[$. Le choix des mots associés aux quantificateurs va de paire avec une interprétation correcte des symboles mathématiques (*cadre de la logique élémentaire*).

La première étape consiste à *traduire* la convergence de la suite (x_n) vers x en $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1, \forall n \geqslant n_1,\ |x_n - x| \leqslant \varepsilon$ (*reconnaissance de la définition de convergence vers un réel*). Il est utile de remarquer que cette définition s'écrit encore $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1, \forall n \geqslant n_1,\ x_n \in B(x,\varepsilon)$ (*interprétation*). L'étudiant doit alors comprendre qu'un choix convenable pour ε lui fournira un indice n_1 qui lui même l'amènera à fournir l'indice n_0 qu'il recherche (*combinaison de deux choix à effectuer*). Une analogie avec ce qui a été fait en ① pour trouver une valeur pour r donne comme indication qu'on peut travailler avec $\varepsilon = \min\{x-a, b-x\}$(*interprétation et reconnaissance d'arguments développés précédemment*). On obtient ainsi un indice n_1 tel que $\forall n \geqslant n_1,\ x_n \in B(x,\varepsilon)$. Or, en ①, on a montré que $B(x,r) \subseteq]a,b[$ où $r = \min\{x-a, b-x\}$. Il suffit alors de constater que le choix $n_0 = n_1$ convient.

Conclusion

L'énoncé est une tâche simple et isolée puisqu'il consiste à appliquer des définitions. Cependant, des liens sont à établir entre chaque définition, des arguments semblables se retrouvent dans des contextes différents (choix du rayon d'une boule, choix d'un ε particulier dans la définition de convergence). Etre capable de repérer ces liens évite de recopier les calculs plusieurs fois.

Le pilier central de l'exercice est la définition ① puisqu'elle met en jeu des raisonnements qui sont utilisés dans la suite de l'exercice. Dès que l'égalité $]a,b[= \mathrm{int}]a,b[$ est traduite en deux inclusions, on passe dans le cadre de la théorie des ensembles et à ce stade de l'exercice, le travail à réaliser n'a plus de lien direct avec la compréhension d'ensemble ouvert. La démonstration de l'inclusion non triviale contient des éléments implicites : des points intermédiaires sont introduits, des quantificateurs sont cachés au départ et apparaissent au fil de l'exercice quand une inclusion est à prouver. Plusieurs arguments sont à articuler. Beaucoup d'informations doivent être interprétées. Des connaissances antérieures sur la manipulation d'inégalités et donc sur l'ordre dans $\mathbb{R}$ sont nécessaires. Un problème d'existence lié à cet ordre intervient dans la démonstration. Ce problème peut être résolu grâce à l'utilisation d'un dessin.

En conclusion, la tâche, au départ simple et isolée, a engendré des activités qui nécessitent de nombreuses adaptations mais aussi la disponibilité de connaissances antérieures sur l'ordre dans $\mathbb{R}$. Ces activités sont réalisées dans les cadres de la logique élémentaire et de la théorie des ensembles. De nombreuses initiatives sont laissées à la charge de l'étudiant. Les activités relèvent donc du niveau des connaissances disponibles.

▸▸ Exercice 2

$\{2\}$ n'est pas un ensemble ouvert.

Solutions possibles

Les solutions possibles consistent à prouver que la négation des définitions d'ouvert en termes de boules et de suites sont vérifiées.

- □ Solution 1 :

  Prenons $x = 2$. Soit $r > 0$. Alors, l'élément $2 + r/2$ appartient à $B(2,r)$ car $|2 + r/2 - 2| = r/2 < r$ mais n'appartient pas à $\{2\}$, ce qui contredit la définition d'ouvert en termes de boules.

  Ce raisonnement montre aussi qu'il est impossible de trouver un réel $r > 0$ tel que $B(2,r) \subseteq \{2\}$. Donc $\operatorname{int}\{2\} = \varnothing$, ce qui montre également que $\{2\}$ n'est pas ouvert.

- □ Solution 2 :

  Considérons la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $x_n = 2 + 1/n$. Cette suite converge vers 2 et on a aussi $\forall n \geqslant 1, x_n \notin \{2\}$, ce qui contredit la définition d'ouvert en termes de suites.

Analyse de l'énoncé

La question est ouverte et aucune méthode n'est indiquée. L'étudiant doit *choisir l'outil* (définition en termes de boules ou de suites) qui lui permettra de répondre à la question. De plus, il doit, avant d'entrer dans la tâche, avoir une idée sur le fait que l'ensemble est ouvert ou non, ce qui implique une bonne *compréhension*, une bonne *interprétation* et une certain degré de *visualisation* des définitions.

- □ Solution 1 :

  On travaille avec la définition en termes de boules. Montrer que $\{2\}$ est ouvert reviendrait à prouver que $\forall x \in \{2\}, \exists r > 0, B(x,r) \subseteq \{2\}$ (*) (*adaptation de la définition du cours : on remplace le nom de l'ensemble par* $\{2\}$ *et* $\mathbb{R}^N$ *par* $\mathbb{R}$). L'information $\forall x \in \{2\}$ est *interprétée* comme $x = 2$.

  Un *support graphique* peut aider à comprendre qu'un tel r est impossible à trouver. Ainsi, $\{2\}$ n'est pas ouvert et on est ramené à prouver la négation de (*) (*reconnaissance de modalités d'application des formules*). On est alors dans *le cadre de la logique élémentaire* mélangé à celui de *la théorie des* *ensembles* (une inclusion d'ensembles apparaît). En distribuant la négation dans (*), on a : $\exists x \in \{2\}, \forall r > 0, B(x,r) \not\subseteq \{2\}$.

Comme $x = 2$, l'information « $B(x,r) \not\subseteq \{2\}$ » *se traduit* en l'existence d'un point y dans $B(2,r)$ différent de 2 (*introduction d'un intermédiaire*). *L'organisation logique* est la suivante : on considère $x = 2$ et on fixe un réel arbitraire $r > 0$. On cherche alors un point y tel que $y \in]2-r, 2+r[$ et $y \neq 2$ (*utilisation de la définition de boule dans* $\mathbb{R}$). Par exemple, $y = 2 + r/2$ convient (*choix lié à l'ordre dans* $\mathbb{R}$).

□ Solution 2 :

On utilise la définition en termes de suites :

$$\forall x \in \{2\}, \forall (x_n) \subseteq \mathbb{R}, (x_n \to x) \Rightarrow (\exists n_0, \forall n \geqslant n_0,\ x_n \in \{2\}).$$

Une *interprétation* correcte de cette définition aide à comprendre qu'il existe des suites qui convergent vers 2 sans devenir ultimement constantes. Il faut donc montrer la négation de la définition ci-dessus (*reconnaissance des modalités d'application des formules*) :

$$\exists x \in \{2\}, \exists (x_n) \subseteq \mathbb{R}, x_n \to x \text{ et } \forall n_0, \exists n \geqslant n_0,\ x_n \notin \{2\}.$$

On est passé dans le *cadre de la logique élémentaire*. Il faut aussi, à ce stade, se rappeler de la négation d'une implication.

On prendra, par exemple, la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $x_n = 2 + 1/n$ (*choix à effectuer*).

Conclusion

La tâche est simple et isolée puisqu'elle porte sur l'utilisation de la définition d'ensemble ouvert.

L'entrée dans la tâche demande cependant une compréhension fine de la définition d'ouvert puisqu'il faut se rendre compte que cette définition n'est pas vérifiée. Une initiative est laissée à la charge de l'étudiant puisqu'il doit choisir avec quel type de définition il va travailler. Dès que l'étudiant a choisi une définition, le cadre de la logique élémentaire est mobilisé puisqu'il faut la nier. Dès ce moment, la production demandée sort du cadre de la topologie puisqu'elle consiste à prouver une écriture quantifiée dans laquelle les concepts topologiques n'interviennent pas. Il y a un problème d'existence dans chaque solution.

Les activités mises en jeu pour résoudre la tâche nécessitent des adaptations variées et un travail qui mélange plusieurs cadres. L'ordre sur $\mathbb{R}$ apparaît aussi comme une connaissance antérieure qui doit être disponible.

Ainsi, la tâche, simple et isolée au départ, donne lieu à des activités dont le niveau de mise en fonctionnement relève de connaissances disponibles.

Remarquons que cet énoncé peut se généraliser à n'importe quel singleton $\{a\}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

▸▸ Exercice 4

Solutions possibles

A partir des définitions présentées dans le plan du cours (paragraphe 1.2 de ce chapitre), il s'agit de montrer que les trois propositions suivantes sont vérifiées :

① $[-1,4] = \mathrm{adh}[-1,4]$

② $\forall x \in \mathbb{R}, \forall (x_n) \subseteq [-1,4], (x_n \to x) \Rightarrow x \in [-1,4]$

③ $\forall x \in \mathbb{R}, (\forall r > 0,\ B(x,r) \cap [-1,4] \neq \varnothing) \Rightarrow x \in [-1,4]$

Pour ①, il suffit de montrer que $\mathrm{adh}[-1,4] \subseteq [-1,4]$ puisque l'autre inclusion est toujours vérifiée. Soit $x \in \mathrm{adh}[-1,4]$. Alors, il existe une suite $(x_n) \subseteq [-1,4]$ telle que (x_n) converge vers x. Puisqu'on a $\forall n, -1 \leqslant x_n \leqslant 4$, on obtient, par passage à la limite, que $x \in [-1,4]$.

Pour ② : soit $x \in \mathbb{R}$ et une suite $(x_n) \subseteq [-1,4]$ telle que $x_n \to x$. Par passage à la limite dans les inégalités $-1 \leqslant x_n \leqslant 4$, valables $\forall n$, on obtient que $x \in [-1,4]$.

Pour ③ : soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons qu'on ait $\forall r > 0,\ B(x,r) \cap [-1,4] \neq \varnothing$. En prenant successivement $r = 1, 1/2, 1/3, \ldots$, on construit une suite (x_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}_0,\ |x_n - x| < 1/n$ et $-1 \leqslant x_n \leqslant 4$. On passe tout d'abord à la limite dans la première inégalité. On sait que $1/n \to 0$. En utilisant le théorème de la convergence dominée et le fait que la valeur absolue est une fonction continue, on obtient que (x_n) converge vers x. Le passage à la limite dans les deux inégalités suivantes donne que $x \in [-1,4]$.

Analyse de l'énoncé

La question est fermée et la méthode est indiquée. Cet exercice est l'analogue de l'exercice 1 pour les ensembles fermés. Il faut, en premier lieu, *adapter* les définitions du cours en y *remplaçant* le nom de l'ensemble par $[-1,4]$ et $\mathbb{R}^N$ par $\mathbb{R}$ (*reconnaissance des modalités d'application des formules*).

□ Définition ① :

La production demandée est une démonstration contenant (au moins) deux étapes imposées puisqu'une égalité d'ensembles est à prouver. On est dans *le cadre de la théorie des ensembles*. L'inclusion $[-1,4] \subseteq \mathrm{adh}[-1,4]$ est immédiate (*reconnaissance de la propriété « $E \subseteq \mathrm{adh}E$ »*). Pour montrer l'autre inclusion, on *introduit un intermédiaire* en se donnant un point x dans $\mathrm{adh}[-1,4]$. Il faut montrer que $x \in [-1,4]$. *Plusieurs étapes* sont alors à envisager. La première consiste à *utiliser la définition* de l'adhérence d'un ensemble pour *interpréter* l'information $x \in \mathrm{adh}[-1,4]$ en $\exists (x_n) \subseteq [-1,4] : x_n \to x$. Le fait que la suite soit dans $[-1,4]$ *se traduit* en $\forall n, -1 \leqslant x_n \leqslant 4$. En *articulant* le passage à la limite avec le fait que les inégalités larges sont préservées (*reconnaissance d'une propriété vue au cours théorique*), on obtient $-1 \leqslant x \leqslant 4$. Il reste à *traduire* cette information en $x \in [-1,4]$.

□ Définition ② :

Il faut montrer que l'écriture quantifiée suivante est vérifiée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall (x_n) \in [-1,4], (x_n \to x) \Rightarrow (x \in [-1,4]).$$

L'organisation logique à prévoir est la suivante : prendre un réel arbitraire x et une suite quelconque $(x_n) \subseteq [-1,4]$. Supposer ensuite que (x_n) converge vers x pour en déduire que $x \in [-1,4]$. Les arguments menant à la conclusion sont identiques à ceux utilisés pour la définition ① (*utilisation de ce qui a été fait précédemment*).

- Définition ③ :

  Il faut montrer que l'écriture quantifiée suivante est vérifiée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\forall r > 0,\ B(x,r) \cap [-1,4] \neq \varnothing) \Rightarrow (x \in [-1,4]).$$

L'organisation logique est donnée par : prendre un réel quelconque x, supposer ensuite qu'on a $\forall r > 0,\ B(x,r) \cap [-1,4] \neq \varnothing$ pour en déduire que $x \in [-1,4]$. Une technique vue au cours théorique est utilisée (*introduction d'une technique locale*). Puisque l'hypothèse est valable $\forall r > 0$, on attribue une série de valeurs à r. L'idée est de *choisir* des valeurs de plus en plus petites pour obtenir une suite de nombres qui converge vers 0.

- Si $r = 1$, alors on a $B(x,1) \cap [-1,4] \neq \varnothing$. Cette information *se traduit* en l'existence d'un point noté x_1 qui est à la fois dans $B(x,1)$ et dans $[-1,4]$.
- Si $r = 1/2$, alors il existe un élément noté x_2 tel que $x_2 \in B(x,1/2)$ et $x_2 \in [-1,4]$.
- et ainsi de suite

On construit avec ce procédé une suite (x_n) telle que $\forall n \geqslant 1, x_n \in B(x,1/n)$ et $x_n \in [-1,4]$. Ces deux informations *se traduisent* en $\forall n \geqslant 1, |x_n - x| < 1/n$ et $-1 \leqslant x_n \leqslant 4$. La première inégalité dit que $x_n \to x$. Pour le montrer, il faut *articuler* les arguments suivants : on passe à la limite dans $|x_n - x| < 1/n$, on a vu que $1/n \to 0$, l'inégalité stricte devient large par passage à la limite, la continuité de la valeur absolue permet d'écrire $|\lim x_n - x| \leqslant 0$, et on conclut par le fait qu'une valeur absolue est positive ou nulle (*mise en fonctionnement de résultats du cours*). On déduit que $x \in [-1,4]$ en passant à la limite dans les deux autres inégalités.

Conclusion

L'énoncé est une tâche simple et isolée puisqu'il consiste à appliquer les définitions. Comme dans l'exercice 1, de nombreuses adaptations sont à réaliser : reconnaissance des modalités d'application des formules, interprétations, introduction d'intermédiaires, arguments à articuler. Certains de ces éléments sont cachés implicitement dans la définition. Dans les définitions ② et ③, nous remarquons aussi l'importance du parenthésage. Si les parenthèses étaient mal placées ou absentes dans la définition, l'organisation logique à prévoir serait différente et mènerait à une manipulation erronée de la définition de fermé. Des résultats antérieurs sur la convergence des suites et sur le passage à la limite dans des inégalités sont aussi utilisés.

Comme dans les exercices précédents, les activités ne sont pas réalisées dans le cadre de la topologie mais bien dans ceux de la théorie des ensembles et de la logique élémentaire.

Nous relevons, une fois encore, la différence entre le niveau de difficulté de la tâche et celui des activités engendrées. Celles-ci relèvent en effet du niveau des connaissances disponibles.

L'énoncé peut être généralisé à un intervalle fermé quelconque $[a,b]$, avec $a,b \in \mathbb{R}$.

▶▶ Exercice 11

Solution possible

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $(x_n) \subseteq E$. Supposons que $x_n \to x$. Par définition de E, on a $\forall n, f(x_n) \leqslant 4$. En passant à la limite et en utilisant la continuité de f, on a $f(x) \leqslant 4$. Donc $x \in E$.

Analyse de l'énoncé

La question est fermée, aucune méthode n'est indiquée mais il est suggéré aux étudiants de travailler avec la définition d'ensemble fermé en termes de suites.

Il faut donc vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall (x_n) \subseteq E, (x_n \to x) \Rightarrow (x \in E)$ (*reconnaissance des modalités d'application des formules*). *L'organisation logique* est la suivante : se donner un réel quelconque x et une suite arbitraire (x_n) dans E. Supposer ensuite que $x_n \to x$. Le fait que les éléments de la suite appartiennent à E *se traduit* en $\forall n, f(x_n) \leqslant 4$. *Plusieurs étapes* sont alors à envisager. La première consiste à passer à la limite dans l'inégalité précédente pour obtenir, $\lim f(x_n) \leqslant 4$ (*reconnaissance de la limite d'une fonction constante*). Cette étape *s'articule* avec le fait que l'inégalité large est préservée (*reconnaissance d'un résultat du cours*). La continuité de f nous dit que $\lim f(x_n) = f(x)$ (*reconnaissance de la définition de continuité d'une fonction*). Donc $f(x) \leqslant 4$. Cette inégalité est à *traduire* en $x \in E$.

Conclusion

La méthode est fournie par l'enseignant et consiste à appliquer la définition d'ensemble fermé en termes de suites. La tâche est donc simple et isolée. Les activités engendrées ne testent pas la compréhension même d'ensemble fermé. Il s'agit de prouver une écriture quantifiée, c'est donc le cadre de la logique élémentaire qui est mobilisé. Par contre, différents types d'adaptations interviennent dans la solution : la reconnaissance des modalités d'application des formules, des interprétations, l'introduction d'étapes qui nécessitent l'articulation de plusieurs arguments. Des connaissances antérieures sur les passages à la limite et la continuité d'une fonction sont aussi aussi utilisées.

Une fois encore, les activités mises en jeu relèvent du niveau des connaissances disponibles.

L'énoncé se généralise à des ensembles du type $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leqslant a\}$ où $a \in \mathbb{R}$. De même l'inégalité $\leqslant$ peut être remplacée par $\geqslant$. Cet exercice permet aussi d'établir que des ensembles de la forme $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > (<) a\}$ sont ouverts car ils sont le complémentaire des ensembles étudiés ici.

▶▶ Exercice 14

Solution possible

Remarquons que $O\backslash F = O \cap \complement F$ (il faut prouver cette égalité). Comme O et $\complement F$ sont ouverts, on en déduit que $O\backslash F$ est un ouvert car une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Analyse de l'énoncé

La question est fermée, aucune méthode n'est indiquée. *Plusieurs étapes* sont à envisager. La première étape consiste à écrire que $O\backslash F = O \cap \complement F$. Il y a donc *une interprétation* à faire pour écrire l'ensemble $O\backslash F$ en termes d'intersection. Cette égalité est à prouver, elle n'a pas été vue au cours (*cadre de la théorie des ensembles*). On écrit la définition de $O\backslash F$, càd $O\backslash F = \{x \in \mathbb{R}^N : x \in O \text{ et } x \notin F\}$. L'information $x \notin F$ *se traduit* en $x \in \complement F$ et donc $O\backslash F = \{x \in \mathbb{R}^N : x \in O \text{ et } x \in \complement F\}$ (*mélange des cadres de la logique élémentaire et de la théorie des ensembles pour traduire le « et » en une intersection*). Ainsi, $O\backslash F = \{x \in \mathbb{R}^N : x \in O\} \cap \{x \in \mathbb{R}^N : x \in \complement F\} = O \cap \complement F$. La seconde étape consiste à articuler différents arguments pour analyser chaque ensemble de l'intersection : O est ouvert, c'est une donnée de l'énoncé ; F est fermé, son complémentaire est donc ouvert (*mise en fonctionnement d'un résultat du cours*). On conclut en utilisant la propriété qui dit qu'une intersection finie d'ouverts est encore un ouvert (*mise en fonctionnement de résultats du cours*).

Conclusion

La question est fermée et aucune méthode n'est indiquée. Un dessin dans $\mathbb{R}^2$ peut éventuellement aider à la compréhension de l'énoncé et faire penser à écrire l'ensemble $O\backslash F$ en fonction de O et du complémentaire de F. L'étudiant est confronté à la difficulté de savoir comment entrer dans la tâche. La méthode présentée est économique, elle consiste en une adaptation de l'ensemble en termes d'intersection mais celle-ci est laissée à la charge de l'étudiant. La solution demande aussi de se placer à un certain niveau d'abstraction puisqu'on travaille dans $\mathbb{R}^N$.

Les activités mobilisent trois cadres : la logique élémentaire, la théorie des ensembles et la topologie. C'est le seul exercice analysé où nous avons repéré des activités de nature topologique.

L'énoncé comme la solution relèvent ici d'un niveau de connaissances disponibles.

2.3 Synthèse

Au chapitre I, nous avons présenté les adaptations à réaliser pour résoudre une tâche (A. Robert, 2005). Dans les analyses des exercices, nous avons remarqué que pratiquement toutes les adaptations apparaissent.

Pour chaque exercice analysé, nous reprenons dans le tableau suivant les notions du cours théorique que l'exercice fait travailler et quelle tâche leur est associée. Ensuite, nous regardons sur quelles connaissances anciennes et nouvelles l'étudiant est amené à effectuer des adaptations. Enfin, nous indiquons quels cadres sont mobilisés dans la solution.

Le tableau montre que ce sont les notions d'ouvert et de fermé qui sont essentiellement travaillées et sans analyser tous les exercices, la simple lecture de leurs énoncés nous autorise à penser qu'il en sera de même pour les autres exercices. Exception faite de l'exercice 14, tous les exercices analysés font travailler les notions dans $\mathbb{R}$.

La majorité des exercices analysés consistent à appliquer une définition. Même si les énoncés sont posés dans le cadre de la topologie, nous avons constaté que les activités associées ne sont pas de nature topologique. Le tableau montre que les quelques connaissances en topologie qui sont utilisées ne sont pas des connaissances avancées.

Nous avons observé une très nette différence entre le niveau des tâches, à savoir simples et isolées, et celui des activités qui nécessitent des adaptations nombreuses et variées dont une incursion dans plusieurs cadres.

Enfin, la majorité des connaissances anciennes supposées disponibles sont des connaissances de la première année d'université. Ells n'ont pas été abordées dans l'enseignement secondaire.

3 Notre enseignement : quel diagnostic ?

3.1 Nos objectifs d'enseignant

Comme nous l'avons expliqué au début de ce chapitre, l'étude de la topologie de $\mathbb{R}^N$ apparaît dans le cours d'analyse en première année parce que les étudiants de la section mathématique ont besoin de telles notions pour aborder le cours d'analyse de deuxième année. Comme il ne s'agit que d'une introduction à cette discipline, notre premier objectif d'enseignement est la compréhension des définitions. L'étudiant doit non seulement être capable de les restituer mais aussi de pouvoir mettre des mots sur les symboles mathématiques qui apparaissent de façon à montrer qu'il ne les retient pas « par cœur ». Ensuite, nous attendons de l'étudiant qu'il soit également capable de manipuler ces définitions. Or, celles-ci font intervenir des quantificateurs, le langage ensembliste (par exemple, des inclusions et des intersections d'ensembles) et la logique élémentaire (manipuler une définition nécessite de s'organiser d'un point de vue logique). Ces connaissances sont supposées disponibles chez les étudiants.

Nous expliquons maintenant comment l'analyse de notre enseignement a permis de comprendre pourquoi ces objectifs sont difficiles à atteindre tout en précisant davantage les difficultés auxquelles les étudiants risquent d'être confrontés.

Exercice	Notion	Tâche mathématique en topologie	Connaissances antérieures	Connaissances en topologie	Cadres
1	ouvert	simple et isolée : appliquer une définition	ordre sur $\mathbb{R}$ inclusion d'ensembles boule ouverte minimum entre 2 quantités inégalités valeur absolue convergence d'une suite	intérieur d'un ensemble Propriété : $\mathrm{int}E \subseteq E$	théorie des ensembles logique élémentaire
2	ouvert	simple et isolée : appliquer une définition	ordre sur $\mathbb{R}$ négation d'une proposition suite convergente		théorie des ensembles logique élémentaire
4	fermé	simple et isolée : appliquer une définition	inclusion d'ensembles limites de suites passage à la limite intersection d'ensembles fonction continue valeur absolue	adhérence d'un ensemble Propriété : $E \subseteq \mathrm{adh}E$	théorie des ensembles logique élémentaire
11	fermé	simple et isolée : appliquer une définition	limites de suites fonction continue		logique élémentaire
14	ouvert	adapter les définitions d'ouverts et de fermés	intersection d'ensembles complémentaire d'un ensemble	Propriété : E ouvert ssi $\complement E$ fermé Intersection finie d'ouverts	topologie théorie des ensembles logique élémentaire

TAB. II.1 – Tableau récapitulatif

3.2 Des notions présentées comme des FUG

Nous avons montré que notre interprétation des concepts topologiques comme des notions FUG est légitime. En effet, l'analyse du cours théorique met en évidence que la topologie de $\mathbb{R}^N$ apparaît comme un chapitre isolé dans le cours. Il n'a pas de lien direct avec les chapitres précédents ni avec des connaissances antérieures en topologie et les concepts topologiques ne sont pas réinvestis dans la suite du cours. Les étudiants ne disposent donc que d'« une seule chance » au sein même de ce chapitre pour maîtriser ces nouvelles connaissances et ce, sur un laps de temps très court.

Toujours en relation avec cette interprétation FUG, nous avons relevé que les concepts topologiques font intervenir un formalisme nouveau pour les étudiants. Nous avons repéré dans ce formalisme différents types de symbolismes :

- un symbolisme ensembliste (présence d'inclusions, d'intersections,...),
- un symbolisme topologique (symboles tels que int, adh, $\complement$),
- un symbolisme lié à l'ordre (présence d'inégalités),
- un symbolisme lié à la logique élémentaire (présence de quantificateurs, d'implications,...).

Le formalisme introduit est donc non seulement nouveau mais il mélange différents registres d'écritures, ce qui accroît sa complexité. Nous avons expliqué notre tentative de préparation de nos étudiants à la manipulation de ces différents symbolismes dans un cours de mathématiques élémentaires mais cette tentative n'est pas fructueuse. Des difficultés risquent donc de se présenter dès l'introduction des définitions.

3.3 Comment les notions sont-elles travaillées ?

Nous venons de déceler une difficulté potentielle qui apparaît dès l'introduction des concepts : un nouveau formalisme qui mélange plusieurs symbolismes. Le travail réalisé sur les concepts topologiques dans les exercices aide-t-il à surmonter cet obstacle ?

Nous avons montré que la majorité des exercices portent sur l'application des définitions d'ouverts et de fermés. Les énoncés consistent essentiellement à manipuler le formalisme puisque les tâches proposées se ramènent à prouver qu'une écriture quantifiée est vérifiée, que ce soit une définition ou sa négation. L'analyse des énoncés a permis d'observer que la manipulation de ce formalisme fonctionne indépendamment de la conceptualisation des objets puisqu'on peut résoudre l'exercice sans revenir au sens des concepts qui apparaissent dans l'énoncé. En effet, nous avons observé que si les énoncés sont posés dans le cadre de la topologie, les activités mises en jeu pour résoudre les tâches ne mobilisent pas ce cadre mais bien ceux de la théorie des ensembles et de la logique élémentaire, parfois simultanément. Les connaissances supposées disponibles pour réaliser ces activités sont des connaissances antérieures sur la convergence des suites, sur les passages à la limite, sur les inégalités, sur l'ordre dans $\mathbb{R}$ et sur la continuité de fonctions. Il ne s'agit donc pas de connaissances en topologie. La majorité des questions sont fermées et dans le cas où la question est ouverte (comme à la question 2, par exemple), notre expérience d'enseignant montre que le choix à effectuer tient plutôt à un côté visuel chez les étudiants (par exemple, ils ont l'intuition que $[0,1]$ n'est pas ouvert parce que les crochets sont fermés) plutôt qu'à une compréhension fine du concept. Le travail proposé sur les concepts topologiques ne dépasse donc pas le stade des objets puisque nous ne proposons pas d'exercice où ces concepts apparaissent comme un outil de résolution.

Une autre difficulté est que les étudiants ne disposent d'aucun moyen de contrôle pour vérifier que leur production est correcte. Les seuls fils conducteurs dont ils disposent sont leur argumentation logique et les détails de calculs.

Dans les exercices proposés, nous avons aussi relevé un décalage important entre la tâche à effectuer et les activités mises en jeu. La plupart des tâches sont simples et isolées puisqu'elles consistent à manipuler une définition. Cependant, les activités mises en jeu pour résoudre l'exercice relèvent d'un niveau de connaissances disponibles. L'entrée dans la tâche nécessite déjà une adaptation de la définition utilisée : il y a lieu de remplaçer le nom de l'ensemble et $\mathbb{R}^N$ par $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$. En tant qu'enseignant, nous avons souvent observé que cette étape, au démarrage, pose des problèmes aux étudiants. Ensuite, une organisation logique est à prévoir. Lorsque celle-ci est développée, des éléments jusqu'alors cachés interviennent : des points intermédiaires sont introduits, des choix sont à effectuer, des étapes dans les calculs sont à envisager, des traductions sont à réaliser. Les adaptations sont donc nombreuses.

Selon nous, le décalage observé entre les tâches et les activités est une spécificité des notions FUG. En effet, les exercices proposés au début de l'enseignement d'une telle notion font essentiellement travailler des connaissances anciennes supposées disponibles. Le travail sur les premières définitions ne consiste donc pas à faire de la topologie. Si l'enseignement ne propose pas d'autres tâches que la manipulation des définitions, les étudiants auront peu d'opportunités pour donner du sens aux concepts puisque les tâches proposées mobilisent uniquement des connaissances antérieures qui ne sont pas topologiques. De plus, ces connaissances supposées disponibles sont des connaissances de l'année en cours, il ne s'agit pas de connaissances de l'enseignement secondaire. En d'autres mots, ces connaissances ne sont pas réellement anciennes et probablement pas disponibles chez tous les étudiants.

3.4 Conclusion

Les difficultés pressenties de notre point de vue d'enseignant se confirment et nous avons montré que notre enseignement ne contribue pas à les aplanir. Le formalisme introduit dans les définitions pose des difficultés de compréhension et sa seule fonction consiste à être manipulé dans les exercices. Or, nous avons montré que cette manipulation ne nécessite pas de comprendre les concepts puisque les activités n'utilisent quasiment pas de connaissances en topologie. Les exercices proposés ne permettent donc pas de revenir au sens des concepts. De plus, nous pensons que le degré de disponibilité des connaissances anciennes nécessaires pour résoudre les exercices n'est probablement pas atteint puisque ces connaissances ne sont en réalité pas si anciennes. Il n'y a donc pas dans notre enseignement, de dynamique entre la formalisation et la conceptualisation. La conceptualisation est finalement laissée à la charge de l'étudiant.

Une voie à explorer pour tenter d'améliorer le rapport entre le formel et le conceptuel serait d'essayer de faire fonctionner les connaissances anciennes dans des exercices qui préparent à la topologie. Le cours de mathématiques élémentaires évoqué au début de ce chapitre semble être approprié pour ce type de démarche.

Chapitre III

Première enquête, 2e année

1 Contexte de l'enquête, public visé

La première enquête a été menée dans notre institution, en décembre 2003. Un questionnaire anonyme a été proposé aux étudiants de deuxième année, section mathématique[1]. Le test s'est déroulé pendant le cours d'analyse, il a duré environ une heure et quinze minutes. Avant de démarrer le test, nous avons expliqué aux étudiants qu'il ne s'agissait pas du tout d'une interrogation (pour éviter le stress de la notation). Cette consigne n'a pas de répercussion négative sur la motivation des étudiants à répondre aux questions. Nous avons précisé que le test portait sur le cours de première année et que nous avions comme objectifs de dresser un bilan de leurs acquis et d'essayer, compte tenu des réponses au questionnaire, d'apporter des modifications dans notre enseignement susceptibles d'améliorer la compréhension des concepts topologiques.

Onze étudiants (un public exclusivement féminin) ont rempli individuellement le questionnaire. Ils ne disposaient pas de leurs notes de cours. De par la section concernée (étudiants en mathématique), ce sont des étudiants sérieux, motivés et travaillant régulièrement pendant toute l'année scolaire.

Pour chaque année d'étude en section mathématique, le cours d'analyse est le cours de mathématiques le plus volumineux du programme. En deuxième année, le cours démarre en septembre, c'est-à-dire dès la rentrée universitaire. La théorie et les exercices sont intégrés dans un même cours, ils ne sont plus scindés entre cours magistraux et séances d'exercices comme en première année. Vu le nombre réduit d'étudiants, le cours est très interactif. Les étudiants sont régulièrement invités à s'exprimer oralement. Ils sont aussi envoyés au tableau pour présenter au début de chaque cours un rappel de la leçon précédente ou pour corriger des exercices. Le cours demande donc aux étudiants un investissement important. Puisque les étudiants sont souvent sollicités pendant le cours, ceux-ci doivent constamment s'accrocher pour en suivre le déroulement. Ce choix d'enseignement semble

[1]A partir de la deuxième année, nous n'avons plus de contact avec les sections pour lesquelles le cours d'analyse est commun en première année. Le cours d'analyse est uniquement organisé en section mathématique.

plaire aux étudiants même s'ils perçoivent le cours d'analyse comme un des cours les plus difficiles de la deuxième année.

Une grande partie du cours d'analyse est consacrée à la topologie. Le premier chapitre est un rappel de la topologie dans $\mathbb{R}^N$. Ensuite, les notions sont présentées dans le cadre des espaces métriques puis dans celui des espaces topologiques. Nous indiquons dans l'annexe B une table des matières du cours. Au moment où l'enquête a été réalisée, les étudiants ont travaillé sur les espaces métriques, les espaces topologiques et différentes topologies qui leurs sont associées, les limites de fonctions et la continuité, un peu de compacité.

2 Le questionnaire

Topologie dans $\mathbb{R}^N$

Test n° 1 (Décembre 2003)

Question 1. Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^N$, avec $N \geqslant 1$.

- □ Quelle(s) définition(s) d'ensemble ouvert connaissez-vous ?
- □ Quelle(s) définition(s) d'ensemble fermé connaissez-vous ?

Question 2.

- □ Citez trois exemples d'ensembles ouverts dans $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^N$, avec $N \geqslant 3$.
- □ Citez trois exemples d'ensembles fermés dans $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^N$, avec $N \geqslant 3$.

Question 3. Soient $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in \mathbb{R}$.
Montrez que l'ensemble $E = \{x^* \in \mathbb{R}^N, f(x^*) > a\}$ est ouvert.

Question 4. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez en détail votre choix.

- □ L'ensemble $\{1/n, n \in \mathbb{N}_0\}$ est fermé.
- □ $[-4, 3[$ n'est ni ouvert, ni fermé.

Question 5. Dans chaque cas, complétez de manière à obtenir une égalité entre deux ensembles. Prouvez en détail chaque égalité.

- □ $\mathrm{int}\{(0,0)\} = \ldots$
- □ $\mathrm{adh}]-2, 3] = \ldots$
- □ $\mathrm{int} \cap_{i=1}^{5} A_i = \ldots$ où $\forall i \in \{1,2,3,4,5\},\ A_i \subseteq \mathbb{R}^N$.

Question 6. Si un étudiant de première candidature vous demande en quoi consiste la topologie, que lui répondez-vous ?

Question 7. Quelles sont, pour vous, les difficultés de ce domaine des mathématiques ?

3 Analyse du questionnaire

Au delà des questions qui nous intéressent ici, le professeur de deuxième année estime que les questions proposées dans le questionnaire testent effectivement des compétences minimales pour aborder son cours.

Nous analysons maintenant chaque question séparément. La question 1 porte sur la connaissance des définitions de base. Rappelons que les ensembles ouverts (respectivement fermés) ont été définis, en première année, en utilisant

- □ la notion de suite,
- □ la notion de boule,
- □ la notion d'intérieur (respectivement d'adhérence).

Les définitions sont données dans le plan du cours théorique présenté au chapitre II, paragraphe 1.2. Les réponses des étudiants vont préciser quelles traces ils ont gardées des différents types de définitions.

La question 2 teste les ensembles qui sont considérés comme références en matière d'ensembles ouverts, fermés[2]. En particulier, cette question permet aussi d'analyser si les étudiants construisent leurs exemples dans $\mathbb{R}^N$ en fonction de ceux qu'ils ont cités dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ou le contraire, ou bien s'ils construisent les ensembles fermés en fonction des ensembles ouverts donnés et réciproquement.

La question 3 est un exercice classique bien qu'étant formel. Il a été résolu en première année sur des cas particuliers où la fonction f et le point a sont donnés explicitement, ce qui n'est pas le cas ici. La méthode présentée en première année consiste à montrer que le complémentaire de l'ensemble E est fermé en utilisant la définition en termes de suites. Cette question teste l'appropriation d'une technique fréquemment utilisée dans le cours d'analyse. Nous n'envisageons pas la résolution de cet exercice en employant telle quelle une des définitions d'ensemble ouvert.

La question 4 porte sur la manipulation des écritures quantifiées et sur l'utilisation de la logique. En effet, la véracité des affirmations proposées est simple à déterminer mais pour justifier en détail son choix, l'étudiant doit travailler avec la négation des définitions puisque chaque affirmation est fausse et donner des contre-exemples appropriés.

A la question 5, l'étudiant doit compléter trois égalités avant de prouver chacune d'elles. On peut s'attendre à ce que la première étape ne pose pas beaucoup de difficultés. Cependant, il y a pour chaque égalité deux inclusions d'ensembles à montrer. Cette question requiert une compréhension fine des notions d'intérieur et d'adhérence d'un ensemble. Tout d'abord, il faut être capable d'écrire correctement les définitions de tous les ensembles qui interviennent. Ensuite, on peut

[2]En première année, nous avons principalement traité les exemples classiques suivants : l'ensemble vide, $\mathbb{R}^N$ avec $N \geqslant 1$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, intervalle ouvert, intervalle fermé, singleton, boule ouverte, boule fermée, ensembles de la forme $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leqslant (\geqslant)\, a\}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

prouver chaque inclusion « à la main » en manipulant les définitions mais on peut aussi faire appel à des résultats du cours et à l'utilisation d'arguments classiques de théorie des ensembles. Chaque égalité à sa spécificité.

Pour la première égalité, on peut par exemple utiliser le fait que l'ensemble vide est une partie de n'importe quel ensemble pour justifier une des deux inclusions. L'autre inclusion demande de bien comprendre la définition d'intérieur et d'être capable de visualiser le fait qu'une boule ne peut pas être complètement incluse à un singleton, pour se rendre compte que l'intérieur d'un singleton se réduit à l'ensemble vide.

La seconde égalité porte sur la notion d'adhérence d'un ensemble. Pour l'inclusion $\mathrm{adh}]-2,3] \subseteq [-2,3]$, l'étudiant peut utiliser l'inclusion $]-2,3] \subseteq [-2,3]$, puis la propriété $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{adh} A \subseteq \mathrm{adh} B$ et conclure par le fait que $[-2,3]$ est fermé, donc égal à son adhérence. Si l'étudiant utilise la définition d'adhérence, il est aussi amené à utiliser des résultats du cours tels que le passage à limite sur des inégalités larges ou strictes. De même, pour prouver l'autre inclusion en manipulant la définition, il faut se rendre compte de l'égalité $[-2,3] =]-2,3] \cup \{-2\}$. Le cadre de la théorie des ensembles est mobilisé et des choix sont à effectuer, notamment la construction de suites.

La dernière égalité mélange les notions d'intérieur d'un ensemble et d'intersection d'une famille finie d'ensembles. Par rapport aux deux égalités précédentes, les données sont ici générales. Pour montrer cette troisième égalité, l'étudiant peut exprimer l'appartenance d'un point quelconque aux deux ensembles (intérieur d'une intersection et intersection d'intérieurs). La difficulté est que la différence entre les écritures qui interviennent repose sur la place des quantificateurs. Il y a donc un mélange entre les cadres de la logique élémentaire et de la théorie des ensembles.

La question 6 vise à cerner les conceptions des étudiants sur la topologie.

La question 7 porte sur les difficultés rencontrées par les étudiants dans l'enseignement de la topologie et en particulier comment ils ressentent l'abstraction des notions et le formalisme utilisé.

En conclusion, le questionnaire « balaie » l'ensemble des notions abordées en première année et a été élaboré en continuité avec le diagnostic obtenu sur notre enseignement. Nous avons montré, au chapitre II, que notre enseignement consistait essentiellement à faire manipuler les définitions d'ensembles ouverts et d'ensembles fermés. Il est donc légitime de poser une question de restitution de ces définitions comme à la question 1 de notre questionnaire et de leur demander des exemples de telles notions. La question 3 est à rapprocher de l'exercice 11 analysé au chapitre II. Dans cet exercice, la fonction f allait de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et le réel a valait 4. La première affirmation de la question 4 a été traitée en première année (voir exercice 12). La seconde affirmation est un mélange entre les exercices 3 et 5. A la question 5 de notre questionnaire, la seconde égalité se rapproche de l'exercice 6 tandis que les deux autres égalités n'ont pas de lien direct avec les exercices analysés. La première teste la compréhension de la notion d'intérieur et la dernière porte sur l'organisation et les arguments logiques à mettre en jeu pour démontrer l'égalité.

La plupart des questions de notre enquête sont donc très proches, voire semblables, à des exercices proposés l'année précédente. Le tableau suivant reprend les questions de notre enquête en leur associant l'exercice correspondant résolu en première année. Nous précisons aussi les adaptations qui ont été réalisées pour passer de l'exercice à la question de notre enquête.

Question	Exercice	Adaptations
3	11	changement de point de vue : passage du cas particulier au cas général passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}^N$ — *a* n'est pas donné
4, 1^{re} affirmation	12	aucune
4, 2^{e} affirmation	3 et 5	changement de point de vue dans la forme de l'énoncé : passage d'une question ouverte à un vrai ou faux
5, 2^{e} égalité	6	changement de point de vue dans la forme de l'énoncé : passage d'une question fermée à une égalité à compléter

Le questionnaire n'introduit donc aucune nouveauté par rapport à l'enseignement de première année. Nous avons montré, au chapitre II, que les exercices proposés faisaient essentiellement travailler les notions d'ouverts et de fermés. Il en va de même pour les questions de notre enquête. Il s'agit d'un choix sur lequel nous nous sommes justifié précedemment. Le but de l'enquête n'est pas de tester des connaissances ou techniques nouvelles mais bien d'obtenir un état des lieux sur ce qui a été acquis en première année. Enfin, le questionnaire contient également deux questions (6 et 7) plus générales qui permettent aux étudiants de s'interroger sur la vision globale qu'ils ont de la topologie en tant que contenu d'un cours et sur les difficultés qu'ils rencontrent.

4 Résultats

Comme nous ne disposons pas d'un échantillon important, nous nous autorisons à rester attentifs à tous les phénomènes observés, même ponctuellement.

Les résultats sont scindés en deux parties. Dans un premier temps, nous présentons les résultats pour chaque question en expliquant comment nous avons dépouillé les réponses. Nous soulevons ensuite les aspects frappants et les erreurs rencontrées. Enfin, nous donnons nos conclusions. Dans un second temps, nous réalisons une étude longitudinale, c'est-à-dire que nous regardons les réponses chez un même étudiant dans le but de déceler si des erreurs récurrentes sont commises et si différentes erreurs peuvent être reliées ensemble ou bien reliées aux difficultés mentionnées par l'étudiant à la question 7.

4.1 Résultats question par question

►► Question 1

Les réponses ont d'abord été classées en fonction des types de définitions mentionnés par les étudiants. En d'autres mots, nous commençons par regarder uniquement les objets auxquels les étudiants ont pensé dans leurs définitions sans nous préoccuper des erreurs rencontrées. Nous indiquons ensuite le nombre de réponses correctes. Parmi les objets cités, nous retrouvons les suites, les boules, l'intérieur, l'adhérence, le complémentaire d'un ensemble.

Objet utilisé	Etudiants	Réponses correctes
Intérieur	10	10
Boule	9	6
Suite	10	6
Complémentaire	3	3

Ensemble ouvert

Objet utilisé	Etudiants	Réponses correctes
Adhérence	10	10
Boule	9	1
Suite	11	6
Complémentaire	3	3

Ensemble fermé

Nous remarquons que la majorité des étudiants répond à la question. Les définitions en termes d'intérieur, d'adhérence et de complémentaire sont toutes correctes. Il est raisonnable de penser que ces définitions ne posent pas de problèmes car le formalisme utilisé est simple (par exemple, A est ouvert si $A = \mathrm{int}A$) et ne fait pas intervenir d'écritures quantifiées.

Un étudiant signale qu'il se rappelle de l'existence d'une définition d'ensemble fermé en termes de suites mais n'est plus capable de la donner.

Nous relevons ensuite un phénomène très marquant pour la définition d'ensemble fermé en termes de boules. L'écriture suivante a été donnée par 7 étudiants sur les 9 qui définissent les ensembles fermés de cette façon :

$$A \text{ est fermé ssi } \forall x \in A,\ \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing.$$

Tous les ensembles A, qu'ils soient fermés ou non, vérifient la propriété $\forall x \in A, \forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing$. Ce type d'erreur nous autorise à penser que le côté « restitution » est très présent chez les étudiants et qu'ils s'intéressent peu à la cohérence de ce qu'ils écrivent. D'autre part, il n'y a pas de parenthésage dans l'écriture et l'implication présente dans la définition correcte a disparu. L'écriture ci-dessus pose donc aussi la question de la compréhension d'une implication. Par rapport à la définition correcte, tout se passe comme si les étudiants n'avaient retenu de la définition que la présence d'une intersection non vide plutôt que la présence d'une implication. Cette implication a disparu mais on retrouve une trace de ce sur quoi elle porte en tête de la définition avec « $\forall x \in A$ ».

Les autres erreurs que nous relevons dans les définitions sont moins fréquentes et sont parfois rencontrées ponctuellement. Nous en donnons quelques unes :

① A est ouvert si $\exists r > 0, \forall x \in A,\ B(x,r) \subseteq A$,

② A est ouvert si $\forall x \in \mathbb{R}^N, x_n \to x \Rightarrow \exists n_0, \forall n \geqslant n_0,\ x_n \in A$,

③ A est fermé si $\forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing$,

④ A est fermé si $\forall x \in \mathbb{R}^N, (\exists r > 0, B(x,r) \subseteq A) \Rightarrow x \in A$,

⑤ A est fermé si $x \in \mathbb{R}^N, \forall (x_n) \subseteq A,\ x_n \to x \Rightarrow x \in A$.

Même si ces erreurs sont moins fréquentes, elles témoignent de manques de précisions dans les écritures : parenthésage absent dans les définitions ② et ⑤, dépendance des variables erronée dans la définition ①, quantificateurs omis dans les définitions ③ et ⑤, amalgame entre les définitions d'ouverts et de fermés dans la définition ④.

Nous retenons du dépouillement de cette question que les étudiants semblent faire beaucoup appel à leur mémoire au détriment d'une réflexion sur ce qu'ils écrivent. La question consistait à donner des définitions, donc à les écrire en termes de symboles mathématiques. Il s'agit d'un travail de restitution. Les étudiants devraient être capables de s'interroger sur les écritures. Cette démarche ne mène pas forcément à la correction de toutes les erreurs mais les aiderait aumoins à s'apercevoir que certaines définitions n'ont pas de sens, par exemple parce qu'elles sont vérifiées par tous les ensembles.

Le parenthésage joue un rôle important dans l'interprétation des définitions. Il est l'équivalent de la ponctuation lorsqu'on rédige un texte. Il permet notamment de délimiter les propositions, par exemple lorsqu'une implication intervient. Il influence aussi l'organisation logique à prévoir si on veut utiliser la définition. Or, il est très peu présent. Nous observons que les quantificateurs posent aussi des difficultés : ils sont souvent mal placés ou même omis.

Les étudiants se sont complètement replongés dans les définitions de première année. Il n'y a aucune mention des définitions d'ouverts et de fermés qu'ils ont rencontrées dans les espaces topologiques en deuxième année. Ce phénomène s'explique peut-être par la consigne donnée au début du test. Pour rappel, nous avons précisé que celui-ci portait sur la matière de première année. Il y a donc là un éventuel effet de contrat.

Conclusion

Lorsque les quantificateurs n'interviennent pas dans les définitions, c'est-à-dire pour les définitions en termes d'intérieur, d'adhérence et de complémentaire, aucune erreur n'est commise. Par contre, quand les écritures sont plus complexes, environ 60% des étudiants donnent des définitions erronées. Pour la définition d'ensemble fermé en termes de boules, une difficulté supplémentaire s'ajoute à la présence des quantificateurs : l'implication. Un seul étudiant est alors capable de donner une définition correcte.

Au chapitre II, l'analyse des exercices a montré que les tâches proposées consistaient à manipuler les définitions. Or, ce type de tâches ne mène pas nécessairement à la conceptualisation des objets manipulés. En particulier, nous avons montré qu'un étudiant pourrait être capable de prouver qu'un ensemble est ouvert parce qu'il sait manipuler les écritures quantifiées sans pour autant comprendre cette notion. Par conséquent, l'étudiant ne dispose que de sa mémoire pour retenir ces définitions. Comme les concepts topologiques ne sont plus retravaillés dans la suite du cours de première année, l'effet mémoire s'estompe et il n'est donc pas surprenant de trouver des erreurs pour une question « basique » de restitution des définitions.

▸▸ Question 2

Etant donné que 11 étudiants ont passé le test, nous devons récolter 33 exemples d'ensembles ouverts et autant d'ensembles fermés (11 dans $\mathbb{R}$, 11 dans $\mathbb{R}^2$ et 11 dans $\mathbb{R}^N$). Pour chaque catégorie d'ensembles, les exemples sont regroupés dans un tableau par ordre de fréquence d'apparition. Les résultats sont interprétés après avoir donné tous les tableaux.

□ ENSEMBLES OUVERTS

– Dans $\mathbb{R}$: 29 exemples sont donnés. Deux étudiants ne donnent qu'un exemple. Pour l'un, il s'agit peut-être d'une mauvaise lecture de l'énoncé, pour l'autre, nous pensons que l'énoncé est clair puisque l'étudiant écrit « $]-3,1[,$ » et ne poursuit pas après la virgule.

  Les 29 exemples donnés sont corrects.

Intervalle ouvert	22
$\mathbb{R}$	4
Ensemble vide	3

– Dans $\mathbb{R}^2$: 28 exemples sont donnés. Deux étudiants ne donnent qu'un exemple et un étudiant n'en donne que deux. 25 exemples sont corrects.

Boule ouverte	13
Produit de 2 intervalles ouverts	5
Ensemble vide	3
$\mathbb{R}^2$	2
$\{(a,b) : 0 < a < 3 \text{ et } -3 < b < 10\}$	1
$B(0,1)$	1

  L'ensemble $B(0,1)$ est considéré comme correct même si le sens du zéro n'est pas précisé. Nous laissons le bénéfice du doute à l'étudiant. Par contre, un étudiant cite l'ensemble $B(1,2)$ que nous ne considérons pas comme correct. Dans le même ordre d'idées, les ensembles de la forme

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) < (>)0\}$, cités deux fois, ne sont pas considérés comme corrects dans la mesure où rien n'est précisé sur f.

Un étudiant écrit $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x-y\| < 3\} = B(a,3)$. Nous pensons qu'il s'agit ici d'une faute d'inattention car ce même étudiant s'inspire de cet exemple pour donner un ensemble fermé et là, il indique bien B(y,3).

– Dans $\mathbb{R}^N$: 24 exemples sont donnés. Deux étudiants ne donnent que deux exemples et deux autres étudiants n'en donnent qu'un. Un étudiant ne fournit aucun exemple. 20 exemples sont corrects.

Boule ouverte	12
$\mathbb{R}^N$	4
Ensemble vide	3
Produit de N intervalles ouverts	1

Un étudiant cite $\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) > a\}$ sans précisions sur la fonction f et le point a.

Un étudiant donne $B(0,x)$ sans précision sur x. Ce même étudiant cite ensuite « l'air contenu dans une boîte métallique fermée » et $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z < 0\}$. Nous n'acceptons pas ces exemples car l'étudiant se place dans $\mathbb{R}^3$ alors que l'énoncé demande de se placer dans $\mathbb{R}^N$, avec $N \geqslant 3$. Cependant, l'exemple de la boîte témoigne d'un certain degré de visualisation des ensembles ouverts chez cet étudiant et le troisième exemple est correct si on travaille dans $\mathbb{R}^3$.

□ ENSEMBLES FERMÉS

– Dans $\mathbb{R}$: 30 exemples sont donnés. Un étudiant ne donne que deux exemples et un étudiant n'en donne qu'un. Les 30 exemples sont corrects.

Intervalle fermé	16
Singleton	5
$\mathbb{R}$	4
Ensemble vide	3
$\mathbb{N}$	1
$\{1,2,3\}$	1

– Dans $\mathbb{R}^2$: 29 exemples sont donnés. Deux étudiants ne donnent que deux exemples, un étudiant n'en donne qu'un. 27 exemples sont corrects.

Boule fermée	13
Produit de 2 intervalles fermés	6
Ensemble vide	3
$\mathbb{R}^2$	2
$\{(a,b) : a+b=3\}$	1
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x+3 \leqslant 0\}$	1
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leqslant 0\}$	1

Nous avons accepté des exemples tels que $B[a,r]$, $[a,b]\times[c,d]$, $B[0,1]$, $\{x\in\mathbb{R}^2 : \|x-a\|\leqslant 2\}$.

Un étudiant donne comme exemples $B[a,r]$, avec $a\in\mathbb{R}$ et $r>0$ et $B[1,2]$.

– Dans $\mathbb{R}^N$: 26 exemples sont donnés. Deux étudiants ne donnent qu'un exemple, un étudiant n'en donne aucun. 22 exemples sont corrects.

Boule fermée	11
$\mathbb{R}^N$	4
Ensemble vide	3
Produit de N intervalles fermés	2
$\{a\}$, où $a\in\mathbb{R}^N$	1
$\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ où $a_i\in\mathbb{R}^N$	1

Comme pour les ensembles ouverts, le même étudiant donne ici l'ensemble $\{x\in\mathbb{R}^N : f(x)\leqslant a\}$ sans rien préciser sur la fonction f ni sur le point a.

De même, l'étudiant qui cite une boîte et se restreint à $\mathbb{R}^3$ pour les ensembles ouverts donne ici : « un cube », « une gomme » et $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z\leqslant 0\}$.

D'un point de vue plus général, nous relevons aussi les faits suivants dans le dépouillement de cette question. Ce ne sont pas les mêmes étudiants qui citent $\mathbb{R},\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^N$, l'ensemble vide ou la notion de boule dans chaque situation. En réalité, les étudiants utilisent peu ce qu'ils donnent dans $\mathbb{R}$ pour construire d'autres exemples dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^N$ et inversement. Par exemple, la boule unité est citée dans $\mathbb{R}^2$ chez plusieurs étudiants mais n'apparaît pas dans $\mathbb{R}^N$ chez ces mêmes étudiants. Un seul étudiant utilise très simplement les exemples qu'il fournit dans $\mathbb{R}$ pour en donner d'autres. En effet, ses exemples sont :

- □ Ouverts dans $\mathbb{R}$: $\varnothing$, $\mathbb{R}$, $]-1,1[$,
- □ Ouverts dans $\mathbb{R}^2$: $\varnothing$, $\mathbb{R}^2$, $B(0,1)$,
- □ Ouverts dans $\mathbb{R}^N$: $\varnothing$, $\mathbb{R}^N$, $]-1,1[\times\cdots\times]-1,1[$, N fois,
- □ Fermés dans $\mathbb{R}$: $\varnothing$, $\mathbb{R}$, $[-1,1]$,
- □ Fermés dans $\mathbb{R}^2$: $\varnothing$, $\mathbb{R}^2$, $B[0,1]$,
- □ Fermés dans $\mathbb{R}^N$: $\varnothing$, $\mathbb{R}^N$, $[-1,1]\times\cdots\times[-1,1]$, N fois.

Nous relevons également une certaine forme de conceptualisation chez l'étudiant qui donnent les exemples dans $\mathbb{R}^3$ en parlant de boîte, de cube et de gomme. Mais nous ne savons pas comment l'étudiant relie ces objets aux définitions formelles.

Conclusion

Même si l'énoncé n'imposait pas d'utiliser les exemples donnés dans un espace pour en contruire d'autres dans un nouvel espace, nous pensons que les étudiants ont des difficultés à conceptualiser un même objet dans des espaces différents (nous pensons notamment à la notion de boule), même en deuxième année.

Les étudiants utilisent peu leurs exemples dans $\mathbb{R}$ pour en construire d'autres. Inversement, ils pourraient aussi partir de leurs exemples dans $\mathbb{R}^N$ pour revenir dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ mais ce n'est pas le cas. Nous retrouvons, comme à la question 1, ce comportement qui consiste, chez les étudiants, à ne pas s'interroger sur ce qu'ils écrivent pour produire de nouvelles idées, ce qui leur permettrait aussi de travailler plus simplement et de façon plus économique.
Nous observons aussi, comme à la première question, certaines imprécisions telles que ne rien dire sur le centre ou le rayon d'une boule, faire intervenir une fonction sans parler de sa continuité, propriété qui joue pourtant un rôle fondamental dans le fait que l'ensemble est ouvert ou fermé.
Enfin, même à ce niveau d'enseignement, tous les étudiants ne sont pas capables de donner trois exemples dans chaque cas. Cependant, les exemples donnés sont majoritairement corrects.

▸▸ Question 3

Tous les étudiants répondent à la question. Quatre étudiants se lancent dans une preuve directe, c'est-à-dire qu'ils essaient de prouver que l'ensemble est ouvert avec une des définitions du cours, sans passer par le complémentaire. L'un utilise la définition d'ouvert en termes de boules et s'arrête là. Les trois autres utilisent la définition en termes de suites. Ils écrivent cette définition et la définition de convergence d'une suite, puis sont aussi bloqués sauf pour un étudiant.

Nous reproduisons ci-dessous sa solution. La preuve est erronée et est un exemple typique de la stratégie qu'on pourrait appeler « la fin justifie les moyens » : nous avons l'impression que l'étudiant cherche à tout prix à passer d'une ligne à l'autre pour arriver coûte que coûte à ce qu'il veut obtenir, en laissant peu de place à la signification de ses écritures. Sa production contient de nombreuses erreurs. De plus, aucune conclusion n'est donnée, l'étudiant ne revient pas ce qu'il montre finalement.

> Soit $x \in E$.
> Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^N$. Supposons que $x_n \to x$, c'est-à-dire
> (1) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, |x_n - x| < \varepsilon$,
> et f continue $\leftrightarrow \forall \varepsilon' > 0, \exists \delta \geqslant 0, |x-a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$.
> On pose $\varepsilon = f^{-1}(a) - x$ (on peut car f continue $\Rightarrow f^{-1}$ existe).
> $\exists n_0, \forall n \geqslant n_0, |x_n - a| < \varepsilon$ par (1)
> càd $f(|x_n - x|) \leqslant f(\varepsilon)$
> càd $|f(x_n) - f(x)| \leqslant f(\varepsilon)$ car f continue
> càd $-f(\varepsilon) \leqslant f(x_n) - f(x) \leqslant f(\varepsilon)$
> càd $f(f^{-1}(a) - x) \leqslant f(x_n) - f(x)$
> $a - f(x) \leqslant f(x_n) - f(x)$
> $a \leqslant f(x_n)$

Les sept autres étudiants qui ont répondu à la question sont passés au complémentaire. Trois étudiants rappellent la définition qu'ils vont utiliser. Les autres se

lancent tout de suite dans l'exercice en présentant l'organisation logique à suivre : « soit $x \in \mathbb{R}^N$, soit $(x_n) \subseteq E, \dots$ »
Cinq preuves sont correctes. Les deux autres sont globalement correctes sur le plan des idées mais manquent de précision. Les voici, telles que nous les avons lues dans les copies :

① $\lim f(x_n) \leqslant \lim a$
$f(\lim x_n) \leqslant \lim a$ car f continue
$f(x^*) \leqslant a$

② Il s'agit de l'étudiant qui ne se rappelait pas de la définition d'ensemble fermé en termes de suites mais en connaissait l'existence (voir question 1). Sa solution montre cependant qu'il se souvient des connaissances à mettre en jeu pour résoudre l'exercice :
Comme la fonction était continue, on pouvait passer à la limite.
On avait $f(x_n) \leqslant a$
$\lim f(x_n) \leqslant \lim a$
avec comme hypothèse $x_n \to x^*$
$f(\lim x_n) \leqslant \lim a$
$f(x^*) \leqslant a$

La technique du passage au complémentaire a été présentée en première année. Les étudiants qui utilisent cette technique réussissent globalement l'exercice. Même les étudiants qui manquent de rigueur dans la preuve ont le souvenir des arguments qui interviennent (utilisation des suites, endroit précis où intervient la continuité de la fonction,...). Par contre, les étudiants qui essaient une preuve directe échouent, ce qui laisse penser que la manipulation de la définition de continuité pose des problèmes. Nous pouvons aussi nous demander si les étudiants qui passent au complémentaire auraient été capables d'utiliser une preuve directe.

Les étudiants auraient pu utiliser, pour cet exercice, l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue, résultat établi en deuxième année. Une fois encore, le fait d'avoir précisé que le questionnaire testait les acquis de première année leur a-t-il consciemment ou pas interdit d'utiliser leur cours de deuxième année ?

Conclusion

La technique du passage au complémentaire est une connaissance disponible chez 7 étudiants, c'est-à-dire chez environ 60% d'entre eux.

►► Question 4

□ Affirmation : « L'ensemble $\{1/n : n \in \mathbb{N}_0\}$ est fermé. »
Tous les étudiants répondent à la question. 9 étudiants répondent « faux ». Dans les justifications, nous avons distingué les étudiants qui expliquent précisément qu'ils vont nier la définition pour montrer que l'ensemble n'est pas fermé (réponse correcte) de ceux qui ne donnent qu'un contre-exemple sans expliquer en quoi cela contredit la définition d'ensemble fermé ; nous parlons alors de réponse imprécise.

Réponses correctes	5
Réponses imprécises	4

Les trois étudiants qui, à la question 3, commencent par donner la définition utilisée, font de même ici : ils donnent la définition puis la nient. Les autres donnent directement la négation. Tous les étudiants qui répondent « faux » travaillent avec la définition d'ensemble fermé en termes de suites.

Un étudiant répond « vrai » et justifie avec un contre-exemple montrant que l'affirmation est fausse. Un autre utilise une définition de fermé qui est vérifiée par tous les ensembles (voir question 1). Nous notons que, même si sa preuve ne répond pas à la question, le raisonnement est cohérent puisque la définition est correctement manipulée et les enchaînements logiques sont bien expliqués. Nous la donnons ci-dessous. Ces deux derniers cas montrent une fois encore le manque de cohérence dans les raisonnements des étudiants et l'absence de sens dans ce qu'ils écrivent.

> $\{1/n : n \in \mathbb{N}_0\}$ est fermé ?
> càd $\forall x \in \{1/n : n \in \mathbb{N}_0\}, \forall r > 0, B(x,r) \cap \{1/n : n \in \mathbb{N}_0\} \neq \varnothing$?
> Soit $x \in \{1/n : n \in \mathbb{N}_0\}$, càd $x = 1/n_1, n_1 \in \mathbb{N}_0$.
> Soit $r > 0$.
> A-t-on $B(x,r) \cap \{1/n : n \in \mathbb{N}_0\} \neq \varnothing$?
> càd $]x-r, x+r[\cap \{1/n : n \in \mathbb{N}_0\} \neq \varnothing$?
> càd $]1/n_1 - r, 1/n_1 + r[\cap \{1/n : n \in \mathbb{N}_0\} \neq \varnothing$?
> Oui car $1/n_1 \in]1/n_1 - r, 1/n_1 + r[$ et $1/n_1 \in \{1/n : n \in \mathbb{N}_0\}$.
> Donc $\{1/n : n \in \mathbb{N}_0\}$ est fermé.

- □ Affirmation : « $[-4,3[$ n'est ni ouvert, ni fermé. »

  10 étudiants répondent « vrai ». Un étudiant ne répond pas à la question. Tous les étudiants ont scindé leur réponse en deux parties, l'une où ils expliquent pourquoi l'ensemble n'est pas ouvert, l'autre pourquoi il n'est pas fermé.

  – $[-4,3[$ n'est pas ouvert. 8 réponses sont correctes. Nous trouvons plusieurs types de justifications.

L'ensemble n'est pas égal à son intérieur	4
Contre-exemple en termes de suites	2
Contre-exemple en termes de boules	2

En choisissant de travailler avec la notion d'intérieur, les étudiants évitent la manipulation des écritures quantifiées.

Les réponses suivantes, trop imprécises, ne sont pas considérées comme correctes : « $[-4,3[$ n'est pas ouvert car $[-4,3[\neq]-4,3[$ », chez un étudiant et « $[-4,3[$ n'est pas ouvert car il est fermé en -4 », chez un étudiant.

Parmi les étudiants qui justifient avec la notion d'intérieur, nous trouvons un étudiant qui n'avait pas donné cette définition à la première question. Il fait pareil avec la notion d'adhérence ci-dessous.

– $[-4,3[$ n'est pas fermé. Les huit mêmes étudiants que précédemment répondent correctement. Nous avons aussi plusieurs types de justifications.

L'ensemble n'est pas égal à son adhérence	3
Contre-exemple en termes de suites	5

La définition en termes de boules n'est pas utilisée pour fournir un contre-exemple.

Nous retrouvons les mêmes imprécisions que précédemment chez les mêmes étudiants : « $[-4,3[$ n'est pas fermé car $[-4,3[\neq[-4,3]$ », « $[-4,3[$ n'est pas fermé car il est ouvert en 3 ».

Conclusion

Cette question est, globalement, bien réussie. La démarche de justification est présente pour chaque affirmation. Les étudiants sont capables de travailler avec la négation des définitions pour fournir des contre-exemples appropriés.

Pour la première affirmation, le formalisme est correctement manipulé, même chez les étudiants dont la réponse est incorrecte. Mais pour la seconde affirmation, les réponses incorrectes proviennent d'imprécisions, peut-être dues au côté visuel de l'affirmation.

▶▶ Question 5

Nous classons d'abord les réponses en trois catégories : les étudiants qui ont correctement complété l'égalité avec démarche de justification, ceux qui ont complété sans justifier et enfin ceux qui ont mal complété. Ensuite, nous analysons les justifications.

□ $\mathrm{int}\{(0,0)\}=\ldots$

Compléter et justifier	9
Compléter sans justifier	1
Compléter avec erreur	1

L'étudiant qui a mal complété l'égalité a écrit :

$$\mathrm{int}\{(0,0)\}=\{x\in\{(0,0)\}:\exists r>0,B(x,r)\subseteq\{(0,0)\}\}=(0,0)$$

La définition d'intérieur est correcte, l'erreur se situe au niveau de l'interprétation qu'en fait l'étudiant.

JUSTIFICATIONS :

① Ecrire $\mathrm{int}\{(0,0)\}$ en termes de boules et remarquer qu'il se réduit à l'ensemble vide.

Etudiants	Réponses correctes
3	3

② Prouver chaque inclusion.

Inclusion	Etudiants	Réponses correctes
$\varnothing \subseteq \mathrm{int}\{(0,0)\}$	3	3
$\mathrm{int}\{(0,0)\} \subseteq \varnothing$	3	2

Pour la première inclusion, les étudiants utilisent le fait que l'ensemble vide est une partie de n'importe quel ensemble. Pour la seconde inclusion, les étudiants expliquent qu'il est impossible de trouver un $r > 0$ tel que $B\big((0,0),r\big) \subseteq \{(0,0)\}$. Un étudiant n'a rien écrit pour la seconde inclusion. Nous ne retenons donc que deux réponses correctes pour ce type de justification.

③ Nous trouvons le raisonnement suivant, chez un étudiant, correct sur le plan des idées mais écrit de façon trop imprécise et pas suffisamment rigoureuse pour être considéré comme correct.

$\mathrm{int} = \mathrm{adh} - \mathrm{bd}$. Ici, $\mathrm{bd} = (0,0)$ et $\mathrm{adh}\{(0,0)\} = \{(0,0)\}$ car $\{(0,0)\}$ est fermé.
Donc $\mathrm{int}\{(0,0)\} = \varnothing$.

④ Deux étudiants justifient avec l'argument suivant : « $\{(0,0)\}$ est un singleton et un singleton est fermé. »

Nous obtenons donc 5 réponses correctes.

□ $\mathrm{adh}]-2,3] = \ldots$

Compléter et justifier	7
Compléter sans justifier	4

JUSTIFICATIONS :

① Travailler avec la définition d'adhérence.

Etudiants	Réponses correctes
2	1

Un étudiant écrit la définition et s'arrête là.

② Prouver chaque inclusion.

Etudiants	Réponses correctes
4	2

L'inclusion $[-2,3] \subseteq \mathrm{adh}]-2,3]$ n'est pas démontrée.

③ Comme à l'égalité précédente, un étudiant reprend le même raisonnement en travaillant cette fois avec l'égalité $\mathrm{adh} = \mathrm{int} + \mathrm{bd}$.

Nous obtenons donc 3 réponses correctes.

□ $\operatorname{int} \bigcap_{i=1}^{5} A_i = \ldots$

Compléter et justifier	3
Compléter sans justifier	2
Ne pas compléter	6

La seule démarche de preuve rencontrée est de prouver chaque inclusion. Nous obtenons deux réponses correctes. Un étudiant écrit l'appartenance d'un point à chaque ensemble et s'arrête là.

Conclusion

Cette question est très mal réussie. Il s'agit d'une question qui teste l'aptitude des étudiants à rédiger une preuve en manipulant le formalisme des définitions et en articulant des arguments de logique et de théorie des ensembles. Même si la plupart des étudiants tentent de justifier les deux premières égalités, nous constatons que peu d'entre eux y parviennent ; les étudiants dépassent rarement le stade des définitions dans leurs justifications. Dans cette question, ils ne sont donc pas capables de les manipuler. Nous observons une dégradation pour la troisième égalité qui est plus générale que les deux précédentes. Seuls trois étudiants sur onze essaient de justifier et la moitié ne parvient pas à la compléter.

▸▸ Question 6

Le tableau ci-dessous reprend les conceptions des étudiants sur la topologie.

En quoi consiste la topologie ?	Etudiants
Etudier les ensembles	6
Etudier les différences entre ouverts et fermés	3
Faire des unions et des intersections	3
Etudier l'intérieur et l'adhérence	2
Pas de réponse	2
Partie la plus abstraite du cours	1
Classer les ensembles	1
Partie la moins difficile en analyse	1
Résoudre des problèmes de limites	1

Conclusion

Les réponses reprennent surtout les objets étudiés : ensembles, intérieur, adhérence,... Le caractère outil de la topologie est évoqué brièvement par le dernier étudiant dans le tableau. La topologie est décrite en termes de contenus, les étudiants n'ont pas suffisamment de recul par rapport au cours pour s'interroger sur l'utilité de ce qu'ils étudient. Ce constat peut être mis en relation avec les difficultés d'enseignement de notions FUG : en première année, la topologie est un chapitre isolé dans le cours, nous avons montré que les concepts topologiques restent au stade des objets ; les tâches proposées consistent en la manipulation des définitions et c'est précisément ce côté manipulatoire que nous retrouvons ici dans les réponses des étudiants.

L'abstraction de la topologie n'est évoquée qu'à une reprise. Peut-être est-ce dû au fait que le questionnaire porte sur l'espace $\mathbb{R}^N$, surtout sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ et que les étudiants peuvent visualiser un certain nombre de notions dans cet espace.

Un autre constat est que les notions étudiées en deuxième année ne sont pas évoquées. Là aussi, il y a peut-être un effet de contrat puisque nous avions spécifié au début du test que nous nous placions dans $\mathbb{R}^N$. Une autre explication est en rapport avec le caractère FUG des concepts : nous pensons que les concepts étudiés en deuxième année dans le cadre des espaces topologiques sont tellement généralisateurs que les étudiants ne songent même pas à les utiliser dans un autre cadre que les espaces topologiques, et en particulier lorsqu'ils ont à retravailler dans $\mathbb{R}^N$.

►► Question 7

Les difficultés rencontrées par les étudiants sont reprises dans le tableau cidessous.

	Difficultés	Etudiants
1	Pas de réponse	3
2	Maîtriser la diversité des définitions	3
3	Difficulté des démonstrations	1
4	Se représenter les objets	1
5	Utiliser les suites pour les ouverts	1
6	Méthodes à appliquer	1
7	Manipuler les quantificateurs	1
8	Quantité importante de propriétés	1
9	Savoir s'il faut résoudre l'exercice avec les suites ou les boules	1
10	Trouver des exemples	1
11	Abstraction	1
12	Passage du particulier en 1re année au général en 2e année	1

Certains étudiants citent plusieurs types de difficultés : un étudiant cite 2 et 9, un étudiant donne 4 et 5, un étudiant cite 2 et 7.

Conclusion

Beaucoup de difficultés sont données en termes de quantité de notions à maîtriser : définitions, méthodes, démonstrations. L'abstraction ne semble pas être une difficulté ; elle n'est citée qu'une fois. Nous observons aussi que les difficultés relèvent de la manipulation des objets. Elles sont internes à la topologie, elles ne portent pas sur l'utilisation de la topologie dans d'autres parties du cours. Les difficultés observées peuvent être reliées au diagnostic établi au chapitre II. Nous y avions effectivement montré que les définitions sont données en faisant intervenir différents objets et que les exercices portent sur la manipulation de ces définitions. Nous retrouvons bien cet aspect manipulatoire.

4.2 Etude longitudinale

Nous analysons ici les productions individuelles de trois étudiants.

▸▸ Etudiant 1

Nous regardons la copie de l'étudiant qui a donné comme exemples une gomme, une boîte, …(voir les résultats de la question 2, section 4). Nous avons choisi cette copie pour l'originalité des exemples. Nous reprenons successivement chaque question.

Les définitions sont données en termes de suites et de boules. Elles sont toutes correctes sauf celle d'ensemble fermé en termes de boules (voir les résultats de la question 1, section 4, pour la définition donnée par 7 étudiants).

A la question 3, cet étudiant rappelle la définition d'ensemble ouvert en termes de suites. Il se lance donc dans une preuve directe. Il écrit l'organisation logique à prévoir : « soit $x \in E, \ldots$ » et s'arrête là.

La question 4 est correcte.

A la question 5, l'étudiant écrit, pour la première égalité $\mathrm{int} = \mathrm{adh} - \mathrm{bd}$. C'est donc très imprécis. La seconde égalité est elle aussi rédigée de façon très imprécise : $\mathrm{adh}]-2,3] = [-2,3]$ car $]-2,3] \subseteq [-2,3]$. Reste -2, $-2+1/n \to -2$ et $\in \mathrm{adh}]-2,3]$. Nous remarquons aussi que les notions d'intérieur et d'adhérence n'apparaissent pas dans les définitions à la question 1. La troisième égalité n'est pas complétée.

L'étudiant ne répond ni à la question 6, ni à la question 7.

Conclusion

Cet étudiant est capable de restituer les définitions mais les connaissances mises en jeu pour les manipuler ne sont pas disponibles, comme nous pouvons l'observer à la question 3. A la question 5, le formalisme est manipulé de façon très imprécise.

Tout se passe comme si cet étudiant était uniquement capable de restituer les définitions sans pouvoir les manipuler. Les exemples donnés témoignent cependant d'une certaine visualisation des notions d'ouverts et de fermés dans l'espace $\mathbb{R}^3$; l'étudiant se rattache à des objets de la vie courante. Nous pensons que le saut de complexité pour repasser aux objets mathématiques est trop important pour l'étudiant.

Le fait de ne pas pouvoir dépasser le stade de la restitution implique que cet étudiant est incapable de résoudre un exercice avec suffisamment de précision et de rigueur mathématique. L'étudiant ne parvient pas non plus à répondre aux questions générales.

Cet étudiant peut donc manipuler un peu le formalisme dans des questions simples comme à la question 4 ; il a aussi une certaine compréhension des concepts d'ouverts et de fermés comme le montrent ses exemples. Mais ce début de formalisation et ce début de conceptualisation fonctionnent séparément. Lorsque l'étudiant fait fonctionner le formalisme, il n'a pas, à sa disposition, une conceptualisation suffisante des objets qu'ils manipulent (voir question 5) et lorsqu'il doit témoigner de sa conceptualisation des objets, il ne fait pas appel au formalisme mais à sa vision des objets (voir question 2).

▶▶ Etudiant 2

Nous regardons la copie de l'étudiant qui donne, à la question 3, une preuve complètement erronée, remplie de non sens (cette preuve est recopiée dans le dépouillement de la question 3, section 4). Il s'agit donc d'une production bien typée.

Les définitions sont données en termes de boules, de suites, d'intérieur, d'adhérence et de complémentaire. Les objets sont donc variés. Toutes les définitions sont correctes sauf celle d'ensemble fermé en termes de boules (voir question 1 pour l'erreur commise par 7 étudiants).

Tous les exemples sont corrects.

A la question 3, la solution de l'étudiant est complètement fausse. Cependant, nous pensons que la structure, la longueur de la réponse, la présence d'enchaînements logiques peuvent faire croire à l'étudiant, par effet de contrat, que sa production semble tout à fait correcte.

Cette idée de fournir une réponse qui ne correspond pas du tout à ce qui est demandé se retrouve dans les questions suivantes.

A la question 4, l'étudiant explique que A n'est ni ouvert ni fermé car $\forall r > 0, B(1,r) \cap A \neq \varnothing$. Pour l'ensemble $[-4,3[$, l'étudiant explique qu'il n'est ni ouvert ni fermé car il est fermé en -4 et ouvert en 3. Il s'agit d'une intuition qui, selon nous, n'est pas reliée aux définitions chez l'étudiant.

A la question 5, nous trouvons que $\text{int}\{(0,0)\} = \varnothing$ car par définition, un singleton est fermé.

Selon cet étudiant, la topologie étudie les ensembles et une difficulté rencontrée est le nombre important de propriétés.

Conclusion

Les seules réponses correctes sont la restitution des définitions (sauf une) et les exemples. Lorsqu'il s'agit de développer un raisonnement et d'utiliser les définitions, les réponses de cet étudiant sont soit trop imprécises soit elles n'ont pas de lien direct avec la question. Nous pensons que cet étudiant procède beaucoup par effet de contrat. Il sait que chaque réponse doit être justifiée, son problème consiste à trouver le résultat à utiliser. La quantité de propriétés à connaître est d'ailleurs une difficulté qu'il mentionne à la question 7.

A la question 3, le formalisme est manipulé en dépit du bon sens. Dans les autres questions, nous remarquons que l'étudiant ne cherche pas à manipuler le formalisme. En plus d'être erronées, les justifications sont alors rédigées avec très peu de précision, comme à la question 4.

Cet étudiant manipule donc un formalisme qu'il ne maîtrise pas du tout et il n'y a, dans cette copie, aucune trace d'une conceptualisation des objets puisque l'étudiant ne dépasse pas le stade de la restitution des définitions. Cela montre aussi que le formalisme peut être manipulé, rigoureusement ou pas, indépendamment de la conceptualisation des objets.

▶▶ Etudiant 3

Nous regardons ici la copie de l'étudiant qui, à la question 1, se souvient de l'existence d'une définition d'ensemble fermé en termes de suites sans pouvoir la donner (voir section 4). Pourtant, à la question 3, cet étudiant est capable de donner les arguments qui interviennent dans la solution en utilisant cette définition. Nous avons donc choisi cette copie pour le côté surprenant de l'utilisation d'une définition alors que l'étudiant n'est pas capable de la restituer.

Les définitions sont données en termes de boules, de suites, d'intérieur et d'adhérence. Elles sont toutes correctes sauf celles d'ensembles fermé en termes de boules (voir question 1, section 4, pour la définition donnée par 7 étudiants).

Les exemples sont corrects.

A la question 4, nous avons recopié la solution de l'étudiant. A la première affirmation, l'étudiant répond vrai et pour le justifier, il manipule parfaitement la définition donnée en termes de boules sans remarquer qu'il y a un problème dans cette définition. L'autre affirmation est correctement justifiée.

A la question 5, tout est correct sauf pour la troisième expression. Là, l'étudiant écrit les deux inclusions à prouver, puis traduit l'appartenance d'un point à chaque ensemble et ne va pas plus loin.

Pour cet étudiant, la topologie consiste à parler d'ensembles ouverts, fermés, d'adhérence, d'intérieur, de boule, d'union et d'intersection. Les difficultés rencontrées sont le mélange des définitions.

Conclusion

Cet étudiant est capable de manipuler le formalisme même sur la base d'une définition fausse. Il y donc un côté manipulatoire très présent et qu'on retrouve d'ailleurs dans la rédaction des réponses et dans les conceptions de l'étudiant à la question 6. La plupart des réponses sont correctes mais nous pensons que l'aspect manipulation empêche l'étudiant de revenir au sens des concepts. A la question 7, la variété des définitions apparaît d'ailleurs comme une difficulté.

La seule manipulation du formalisme, même correctement effectuée, peut donc se présenter comme un obstacle à la conceptualisation des objets.

▶▶ Conclusion

Nous avons observé des phénomènes très différents dans chaque copie. Cette étude longitudinale montre qu'au terme d'un même enseignement, les étudiants réagissent de façon très différente.

En ce qui concerne le rapport entre le formel et le conceptuel, tout se passe comme si finalement, la manipulation du formalisme, qu'elle soit correcte ou pas, ne permet de donner du sens aux notions.

5 Interprétation des résultats

5.1 Synthèse des résultats

Les résultats ont montré que les connaissances en topologie des étudiants de deuxième année ne sont pas stables et surtout peu disponibles. La majorité des étudiants se rappelle des objets qui interviennent dans les définitions : intérieur, adhérence, suites et boules. Certains parlent aussi du complémentaire. Les définitions en termes d'intérieur, d'adhérence et de complémentaire sont correctement écrites ; il est vrai que le formalisme qu'elles contiennent est simple à retenir. Cependant, nous avons repéré des erreurs dans les autres types de définitions chez 60% des étudiants. Ainsi, des problèmes surgissent déjà dans la restitution des définitions : des quantificateurs sont mal placés ou absents, le fait le plus marquant étant qu'une définition donnée par une majorité d'étudiants est vérifiée par n'importe quel ensemble.

Les étudiants ne s'interrogent pas sur leurs écritures mais par contre, certains sont capables de manipuler une écriture quantifiée qui n'a pas de sens. L'aspect manipulation est très présent chez les étudiants et nous avons observé, notamment dans notre étude longitudinale, que cette fonction manipulatoire du formalisme n'est pas associée à une prise de sens. Nous avons aussi remarqué que le formalisme est plus ou moins bien manipulé dans les exercices simples, c'est-à-dire ceux où on reste dans $\mathbb{R}$, comme à la question 4. Mais quand les données sont générales (voir question 5), les étudiants ne sont plus capables de manipuler le formalisme.

La question 3 met en jeu la technique du passage au complémentaire. Cette technique semble disponible chez environ la moitié des étudiants.

Nous avons relevé beaucoup d'imprécisions dans les productions des étudiants. Ces imprécisions se retrouvent dans les écritures utilisées mais aussi dans les démarches : par exemple, ils ne prennent pas la peine de rappeler les définitions avec lesquelles ils travaillent, ils se lancent directement dans l'exercice sans expliquer rigoureusement ce qu'ils vont montrer ni ce qu'ils vont utiliser pour y parvenir. Nous voyons là un éventuel effet de l'enseignement. A ce niveau d'études, nous avons peut-être trop tendance à penser que nous nous adressons à un public « expérimenté » en ce sens que nous nous permettons de passer au-dessus de nombreux détails d'écritures. Les résultats évidents ou étudiés en première année ne sont plus démontrés et souvent admis ou laissés à la charge de l'étudiant. Les connaissances antérieures sont de moins en moins réinvesties, elles sont supposées disponibles chez les étudiants. Or, nous voyons ici que ces connaissances sont finalement très instables. Ceci peut expliquer la dégradation observée dans la rigueur des raisonnements.

5.2 Liens avec l'enseignement de première année

Ces résultats peuvent, selon nous, être mis en rapport avec la nature FUG des concepts topologiques mais aussi avec le diagnostic de l'enseignement de première année établi au chapitre II. Nous y avons montré que les concepts topologiques sont écrits dans un formalisme qui induit des difficultés liées à l'utilisation de quantificateurs, le mélange des cadres de la logique élémentaire et de la théorie des ensembles, la variété des définitions (les concepts sont définis de plusieurs façons). Dans le cours théorique, ces concepts sont destinés à être manipulés pour prouver une série de propriétés sur les notions d'intérieur, d'adhérence, d'ouvert et de fermé. Les étudiants sont donc confrontés à une longue liste de notions à comprendre et à retenir. Cette difficulté se retrouve citée à la question 7. Nous avons aussi montré que les exercices consistent à manipuler les définitions et que ce travail sur le formalisme développe un côté manipulatoire, très présent dans les réponses à la question 6, qui n'est pas associé à une prise de sens, donc à la conceptualisation des notions. L'abscence de sens implique que les étudiants ne disposent finalement que de leur mémoire pour retenir les définitions. Au fil du temps, ils manipulent les notions de façon imprécise tout en étant cependant capables de retenir de façon imparfaite des raisonnements standards utilisés dans les exercices, comme à la question 3.

Le dépouillement du questionnaire a montré que la manipulation du formalisme en première année n'a pas mené à la prise de sens des objets. De plus, cette manipulation n'est correcte que chez peu d'étudiants et surtout lorsque les écritures sont simples, pas lorsque les données sont trop générales comme à la question 5 de l'enquête.

6 Nous avons besoin d'une suite !

Le travail dans les espaces topologiques réalisé tout au long de la deuxième année est encore plus formel qu'en première année. On quitte définitivement l'espace $\mathbb{R}^N$. Les concepts topologiques, à ce niveau, sont encore plus généralisateurs et unificateurs que ceux étudiés dans ce travail.

Compte tenu des résultats obtenus dans cette enquête, nous nous demandons si le fait de travailler sur des objets conceptuellement plus compliqués en deuxième année mène à une conceptualisation de ce qui se passe dans $\mathbb{R}^N$. En d'autres mots, les notions étudiées en première année sont-elles disponibles chez les étudiants de troisième année et comment évolue le phénomène de dégradation observé en deuxième année dans la démarche de justification ?

Nous avons donc souhaité réaliser un questionnaire semblable en troisième année pour comparer les résultats avec ceux obtenus ici.

Chapitre IV

Seconde enquête, 3^{e} année

1 Contexte de l'enquête, public visé

Sur la base de l'enquête réalisée en deuxième année, un questionnaire anonyme a été proposé en mars 2004 aux étudiants de troisième année, en section mathématique. Le test s'est déroulé dans des conditions très semblables à celui organisé en deuxième année. Il a eu lieu pendant un cours d'analyse, des remarques semblables au test précédent ont été données aux étudiants, c'est-à-dire que le questionnaire n'est pas du tout une interrogation ; il vise à dresser un bilan de leurs acquis. Nous n'avons cependant pas précisé que le questionnaire portait sur l'espace $\mathbb{R}^N$ afin que les étudiants puissent utiliser tous leurs acquis. Pour rappel, cette consigne avait été donnée aux étudiants de seconde année. Nous avions constaté que les étudiants utilisaient peu ou pas du tout leur cours de deuxième année, ce qui était peut-être une conséquence de la consigne. Cette fois donc, les étudiants sont libres d'utiliser les concepts topologiques, tous niveaux d'enseignement confondus.

15 étudiants ont rempli le questionnaire. Ce sont des étudiants sérieux, réguliers dans leur travail et motivés. Il y a cependant deux niveaux distincts puisqu'une partie de la classe (4 étudiants) est d'un bon niveau et l'autre partie est en revanche assez faible.

Comme en deuxième année, le cours d'analyse est le cours le plus volumineux du programme et s'étale sur toute l'année. Le professeur est le même qu'en seconde année et le déroulement du cours est identique (voir chapitre III, section 1). En ce qui concerne le cours de première année, les étudiants ont bénéficié du même enseignement (mêmes enseignants, mêmes contenus, mêmes exercices) que les étudiants de deuxième année où l'enquête précédente a été menée.

2 Les questionnaires

Topologie

Test n° 1, 1re partie (Mars 2004)

Question 1. Une personne vous demande en quoi consiste la topologie. Que répondez-vous si cette personne est

① un étudiant de 1re licence math ?

② un étudiant de 2e candi math ?

③ un étudiant de 1re candi math ?

④ un étudiant de l'enseignement secondaire ?

Question 2. Vous vous souvenez de l'enseignement de la topologie reçu pendant vos deux années de candidature. Pensez-vous que cet enseignement a été utile dans la suite de vos études ? Expliquez pourquoi et si oui, précisez à quelle occasion.

Question 3. Quelles sont, pour vous, les difficultés spécifiques de ce domaine des mathématiques ?

Topologie

Test n° 1, 2e partie (Mars 2004)

Question 1. Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^N$, avec $N \geqslant 1$.

- □ Quelle(s) définition(s) d'ensemble ouvert connaissez-vous ?
- □ Quelle(s) définition(s) d'ensemble fermé connaissez-vous ?

Question 2. Citez un exemple d'ensemble ouvert et un exemple d'ensemble fermé dans $\mathbb{R}^N$ qui ne soient ni $\mathbb{R}^N$, ni l'ensemble vide, ni une boule.

Question 3. Dans chaque cas, complétez avec les symboles $=, \subseteq, \supseteq$. Prouvez en détail chaque inclusion.

- □ $\operatorname{adh}(A \cup B)$ ... $\operatorname{adh} A \cup \operatorname{adh} B$
- □ $\operatorname{adh} \cup_{i=1}^{5} A_i$ ... $\cup_{i=1}^{5} \operatorname{adh} A_i$ où $\forall i \in \{1,2,3,4,5\}, A_i \subseteq \mathbb{R}^N$.
- □ $\operatorname{int} \cup_{i=1}^{5} A_i$ ... $\cup_{i=1}^{5} \operatorname{int} A_i$ où $\forall i \in \{1,2,3,4,5\}, A_i \subseteq \mathbb{R}^N$.

Question 4. Soient $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in \mathbb{R}$. Montrez, en utilisant deux méthodes différentes, que l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R}^N,\ f(x) > a\}$ est ouvert.

Question 5. On considère l'ensemble E de $\mathbb{R}^2$ formé des points (x,y) vérifiant $x^2 + y^2 \leqslant 2$ et l'une au moins des conditions $x + y \leqslant 0$ ou $xy = 1$; on ajoute à cet ensemble l'ensemble des points de la forme $(1/n, 1/n)$ lorsque $n \in \mathbb{N}_0$. Quelle est la nature topologique de l'ensemble obtenu ?

Topologie

Test n° 1, 2e partie (Mars 2004)

Question 1. Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^N$, avec $N \geqslant 1$.

- □ Quelle(s) définition(s) d'ensemble ouvert connaissez-vous ?
- □ Quelle(s) définition(s) d'ensemble fermé connaissez-vous ?

Question 2. Citez un exemple d'ensemble ouvert et un exemple d'ensemble fermé dans $\mathbb{R}^N$ qui ne soient ni $\mathbb{R}^N$, ni l'ensemble vide, ni une boule.

Question 3. Dans chaque cas, complétez avec les symboles $=, \subseteq, \supseteq$. Prouvez en détail chaque inclusion.

- □ $\operatorname{int}(A \cap B) \quad \dots \quad \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$
- □ $\operatorname{int} \cap_{i=1}^{5} A_i \quad \dots \quad \cap_{i=1}^{5} \operatorname{int} A_i \quad$ où $\forall i \in \{1,2,3,4,5\}, A_i \subseteq \mathbb{R}^N$.
- □ $\operatorname{adh} \cap_{i=1}^{5} A_i \quad \dots \quad \cap_{i=1}^{5} \operatorname{adh} A_i \quad$ où $\forall i \in \{1,2,3,4,5\}, A_i \subseteq \mathbb{R}^N$.

Question 4. Soient $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in \mathbb{R}$. Montrez, en utilisant deux méthodes différentes, que l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R}^N,\ f(x) > a\}$ est ouvert.

Question 5. On considère l'ensemble E de $\mathbb{R}^2$ formé des points (x,y) vérifiant $x^2 + y^2 \leqslant 2$ et l'une au moins des conditions $x + y \leqslant 0$ ou $xy = 1$; on ajoute à cet ensemble l'ensemble des points de la forme $(1/n, 1/n)$ lorsque $n \in \mathbb{N}_0$. Quelle est la nature topologique de l'ensemble obtenu ?

3 Analyse du questionnaire

3.1 Objectifs généraux

Le dépouillement du questionnaire réalisé en deuxième année a mis en évidence les faits suivants :

- □ L'aspect « restitution » est très présent, menant à des imprécisions dans les écritures. Cet appel à la mémoire se fait au détriment de la compréhension des concepts enseignés (voir la définition d'ensemble fermé donnée par 7 étudiants sur 11, chapitre précédent).
- □ La dimension « outil » de la topologie est peu ou pas du tout explicitée. Ceci est une conséquence de l'enseignement de première année où les notions gardent leur statut d'objets. L'enseignement de deuxième année permet-il de développer cette dimension ?
- □ Les étudiants profitent peu de leur enseignement de seconde année pour répondre aux questions, notamment dans les définitions et à la question 3 (voir les résultats de la première enquête, section 4 du chapitre III).

Nous nous sommes demandée si ces faits se retrouvaient chez les étudiants de troisième année qui ont beaucoup manipulé les concepts topologiques tout au long de leur deuxième année d'études. Sur la base des résultats obtenus au chapitre III, notre objectif est de réaliser un test semblable en troisième année, en apportant au test déjà réalisé en seconde année des modifications susceptibles d'approfondir les faits ci-dessus et de confirmer ou infirmer nos analyses précédentes. Nous souhaitons aussi, étant donné le niveau d'enseignement, ajouter une question plus compliquée d'un point de vue mathématique.

3.2 Modifications dans la présentation

Nous séparons les questions « mathématiques » et les questions « non mathématiques » dans deux questionnaires distincts (notés 1re partie et 2e partie) pour permettre aux étudiants de prendre du recul par rapport au cours. En effet, les questions générales avaient été posées à la fin du questionnaire de notre première enquête. La topologie apparaissait comme une énumération de contenus et les difficultés étaient liées à la manipulation des notions, ce qui pourrait laisser penser que les étudiants se sont peut-être inspirés de leurs réponses aux exercices pour s'exprimer dans les questions générales. Le test démarrera donc par les questions « non mathématiques » de façon à ce que les étudiants ne cherchent pas des éléments de réponse sur l'utilité du cours ou en quoi consiste la topologie dans les exercices qu'ils résolvent.

Nous ajoutons également une question où on s'intéresse à l'utilité générale des notions étudiées pendant les deux premières années.

D'autres modifications portant sur les questions « mathématiques » sont explicitées dans l'analyse du contenu.

La première partie du test a duré trente minutes et la seconde une heure et quinze minutes.

3.3 Analyse du contenu

▶▶ Première partie

La question 1 permet d'analyser comment les étudiants perçoivent la topologie en fonction du niveau mathématique de la personne à qui ils s'adressent. En particulier, nous regardons si les étudiants parviennent à prendre un certain recul par rapport à leur niveau d'études et par rapport à leur expérience d'étudiants.

La question 2 vise à faire surgir, s'il existe, le caractère outil de la topologie, par exemple pour démontrer certains résultats internes au cours d'analyse ou dans l'utilisation de la topologie dans d'autres cours.

Comme dans le questionnaire précédent, la question 3 précise quelles sont les difficultés rencontrées par les étudiants. En particulier, l'abstraction et le formalisme utilisé sont-ils ressentis comme une difficulté ?

▶▶ Deuxième partie

La question 1 vise à étudier si les étudiants se rappellent des définitions rencontrées. Ils ont beaucoup travaillé la topologie en deuxième année, mais plus dans l'espace $\mathbb{R}^N$. Cette question permet donc aussi de regarder comment ils se replongent dans cet espace.

A la question 2, nous précisons que les exemples donnés ne peuvent être ni l'ensemble vide, ni $\mathbb{R}^N$, ni une boule. Nous voulons éviter les exemples classiques pour déterminer si les étudiants en connaissent de moins triviaux.

La question 3 porte sur des propriétés classiques sur l'intérieur et l'adhérence d'une union et d'une intersection d'ensembles. Nous demandons d'abord de compléter pour tester la connaissance des résultats puis de prouver chaque inclusion de façon à développer une argumentation détaillée. Nous avons mis deux jeux de questions pour couvrir toutes les propriétés. Un groupe a des propriétés sur l'intersection, l'autre sur l'union. Cette question est à relier à la question 5 du questionnaire précédent. Les étudiants ont ici à effectuer un travail plus formel.

A la question 4, nous exigeons deux méthodes différentes dans le but de faire apparaître d'autres techniques que le passage au complémentaire (seule technique présentée en première année) telle que l'image réciproque d'un ouvert ou encore une preuve directe.

Nous ajoutons à ces questions un énoncé plus technique, ne contenant pas d'indication et qui nécessite des étapes à articuler et des arguments variés à produire. A la question 5, nous donnons donc un ensemble fermé et borné où les étudiants ont à justifier, sans indications, que l'ensemble est fermé en utilisant des résultats habituels sur l'union, l'intersection. De plus, les étudiants doivent reconnaître que la difficulté liée à la suite de points est résolue parce que la limite appartient à un des fermés que l'on réunit.

4 Résultats

4.1 Première partie

▶▶ Question 1

Pour expliquer en quoi consiste la topologie, les étudiants donnent un cours à la personne en lui expliquant les notions abordées chaque année. Les réponses des étudiants consistent donc en une description de contenus mathématiques et en une énumération d'objets. Certains contenus apparaissent à tous les niveaux : ensemble ouvert, ensemble fermé et fonction continue. Les réponses sont reprises dans le tableau suivant.

Contenu	3e année	2e année	1re année	ES
Ouverts, fermés	3	6	12	4
Fonctions continues	4	5	3	1
Espaces topologiques	7	7	1	
Existence de plusieurs topologies	7	4	5	
Compacité	3	4	1	
Théorèmes importants	6			
$\mathbb{R}^N$	2		5	5
Différents espaces	2	6		
Espaces compliqués				6
Espaces où la notion habituelle de distance doit être oubliée				6
Continuité du cours de 2e année	2	1		
Continuité du cours de 1re année		2		1
Boule, norme		1	5	
Inutile si on ne fait pas des maths après				1

Nous remarquons, comme en deuxième année, que les étudiants ne se dégagent pas du cours. De notre point de vue d'enseignant, nous nous sommes demandée quelle réponse nous donnerions à cette question. Il nous semble difficile de parler de topologie sans parler de contenus mathématiques. La démarche des étudiants n'est, selon nous, pas surprenante. Pour tenter de répondre à cette question sans parler de contenus, nous développerions l'idée qu'il y a, dans les concepts topologiques, une idée de proximité ; une proximité entre les éléments d'un ensemble, ces éléments pouvant être des points, des fonctions,... Cette proximité est liée au fait qu'on parle de convergence. Nous remarquons aussi qu'en géométrie par exemple, la topologie fait plutôt référence à la déformation des objets. Les concepts liés à la topologie sont donc de nature différente selon le domaine dans lequel on les manipule.

Nous pensons aussi que le discours de l'enseignant joue un rôle fondamental pour amener les étudiants à s'interroger sur l'utilité et l'utilisation de ce qu'on leur enseigne. Cette démarche n'est pas du tout spontanée chez les étudiants. Mais c'est une voie que nous n'explorons pas ici.

▸▸ Question 2

D'après les étudiants, l'enseignement de la topologie des deux premières années sert essentiellement de base pour le cours de la troisième année. Selon eux, le cours d'analyse de la troisième année s'appuie sur les acquis des années précédentes. Voici les réponses des étudiants.

Bases du cours de troisième année	9 étudiants
Utile car liens avec d'autres cours	4 étudiants
Utilité interne à l'analyse, pas de liens	4 étudiants
Développer le sens logique et le sens critique	3 étudiants

Nous remarquons que les étudiants qui perçoivent des liens entre la topologie et d'autres cours sont en fait les « bons étudiants » de la section alors que les étudiants plus faibles ne voient aucun lien ; pour eux la topologie ne dépasse pas le cadre de l'analyse[1]. Notre expérience d'enseignant montre que les étudiants se posent rarement des questions sur l'utilité de ce qui leur est enseigné. Nous pouvons aussi nous demander comment le mot « utile » est interprété par les étudiants ? Par exemple, utiliser un résultat ou un raisonnement dans une démonstration signifie-t-il être utile ?

▸▸ Question 3

Contrairement à ce qui se passe pour les étudiants de deuxième année, la difficulté majoritairement rencontrée par les étudiants est le caractère abstrait de la topologie. Beaucoup d'étudiants perçoivent aussi les exercices comme un travail difficile à effectuer car les énoncés sont toujours différents et les solutions contiennent de nombreuses astuces.

Abstraction	11 étudiants
Astuces et difficultés à réaliser les exercices seuls	6 étudiants
Nombreuses notions à maîtriser	3 étudiants
Domaine vague	2 étudiants

Nous retrouvons des résultats semblables à ceux déjà observés en deuxième année. Les étudiants perçoivent le cours comme une succession de contenus. Les notions étudiées en première année ont pour seule finalité de servir comme prérequis pour la deuxième année qui elle-même sert de base à la troisième année.

Une différence est cependant observée ici : l'abstraction est la difficulté la plus fréquemment rencontrée, ce qui peut s'expliquer par le caractère très formel des concepts étudiés en deuxième année dans le cadre des espaces topologiques.

4.2 Deuxième partie

▸▸ Question 1

La même question a été posée en seconde année. Nous l'avons analysée ici de la même manière. Nous avons d'abord regardé quels types de définitions étaient mentionnés et à quels types d'objets les étudiants faisaient référence, puis nous

[1] Même si le questionnaire est anonyme, il est facile, vu le nombre réduit d'étudiants et par le fait que nous les connaissons bien, de reconnaître leurs écritures.

avons compté les réponses correctes pour chaque type de définition. Dans le tableau suivant, A désigne un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$ et τ une topologie quelconque sur $\mathbb{R}^N$.

Définition	Etudiants	Rép. correctes
$A = \mathrm{int} A$	10	10
$\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$	7	5
$\forall x \in A, \exists O \in \tau, x \in O, O \subseteq A$	7	2
Réunion de rectangles ouverts	3	2
$A \in \tau$	3	3
$\forall x \in A,\ \forall (x_n) \subseteq \mathbb{R}^N,$ $(x_n \to x) \Rightarrow (\exists n_0, \forall n \geqslant n_0, x_n \in A)$	2	2
A est un voisinage de chacun de ses points	1	1

Ensemble ouvert

Définition	Etudiants	Rép. correctes
$\forall x \in \mathbb{R}^N, \forall (x_n) \subseteq A, (x_n \to x) \Rightarrow (x \in A)$	12	2
$A = \mathrm{adh} A$	10	10
$\forall x \in \mathbb{R}^N, (\forall O \in \tau, x \in O, O \cap A \neq \varnothing) \Rightarrow (x \in A)$	7	3
$\complement A$ est ouvert	8	8
$\forall x \in A, (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \Rightarrow (x \in A)$	4	1
$\complement A \in \tau$	2	2
$A \in F$ où $\varnothing, \mathbb{R}^N \in F$, F est stable par union finie et par intersection quelconque	1	1

Ensemble fermé

Les définitions utilisées sont variées et celles rencontrées en deuxième année sont souvent données aussi. Rappelons que les étudiants de seconde année s'étaient complètement replongés dans le cours de première année et n'utilisaient pas du tout les définitions données dans le cadre des espaces topologiques. Mais ici encore, beaucoup d'étudiants se raccrochent aux définitions en termes de boules pour les ensembles ouverts et de suites pour les ensembles fermés données en première année. Nous observons aussi que soit les étudiants donnent toutes leurs définitions dans $\mathbb{R}^N$, soit ils travaillent uniquement dans le cadre des espaces topologiques. Ils ne mélangent pas les deux types de définitions.

Parmi les erreurs rencontrées, nous avons relevé le phénomène suivant, déjà présent en seconde année, qui se confirme et même s'accentue ici : nous trouvons chez les étudiants des manques de précision dans les écritures qui nous amènent à ne pas pouvoir les considérer comme correctes.

Par exemple, cinq étudiants donnent la définition d'ensemble ouvert suivante :

$$A \text{ ouvert si } \exists O \in \tau, x \in O, O \subseteq A.$$

Aucun renseignement n'est donné sur x. De même, 10 étudiants donnent une définition d'ensemble fermés sous les formes suivantes :

- □ Soit $(x_n) \subseteq A,\ x_n \to x \Rightarrow x \in A$
- □ $(x_n) \subseteq A$ et $x_n \to x \Rightarrow x \in A$

Il n'y a pas de quantificateur sur x.

L'erreur qui avait été repérée en deuxième année pour la définition d'ensemble est fermé se retrouve ici chez 3 étudiants :

$$A \text{ fermé si } \forall x \in A, \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing.$$

Conclusion

Comme dans l'enquête réalisée en deuxième année, des erreurs sont déjà repérées dans la restitution des définitions.

Nous n'avions par contre pas relevé d'imprécisions dans la question sur les définitions en deuxième année. Elles apparaissaient plutôt dans les exercices, et plus précisément dans la rédaction des raisonnements. Ce phénomène s'est donc accentué au fil du temps. Lorsque les étudiants donnent ici leurs définitions, nous ressentons un appel à la mémoire dirigé vers la façon d'utiliser ces définitions, comme dans un exercice, et pas sur la façon de les écrire rigoureusement. En deuxième année, les définitions ne sont pas nécessairement réécrites à chaque fois qu'elles sont utilisées. On se plonge d'emblée au coeur des démonstrations. Mais à force de ne pas écrire les définitions « en entier » et de passer directement à leur utilisation dans les démonstrations, les étudiants risquent de devenir imprécis lorsqu'on leur demande de les restituer.

▸▸ Question 2

Compte tenu de l'énoncé et du nombre d'étudiants, nous devions récolter 15 exemples d'ensembles ouverts et 15 exemples d'ensembles fermés. Les deux tableaux ci-dessous reprennent les exemples donnés par ordre de fréquence d'apparition.

- □ Ensembles ouverts : 13 exemples sont donnés, 10 sont corrects.

Pavé ouvert	6
$\{(x_1,\ldots,x_N) \in \mathbb{R}^N : x_i < 0\}$	1
$]1,3[\times]2,5[\times\mathbb{R}^{N-2}$	1
$\mathbb{R}^N \setminus \{x\}$	1
$\operatorname{int} E$ avec $E \subseteq \mathbb{R}^N$	1

Trois étudiants citent comme exemple $]0,1[\times\cdots\times]0,1[$ qui est une boule ouverte.

□ Ensembles fermés : 15 exemples sont donnés, 11 sont corrects.

$\{x\}$	7
$\{0\} \times \cdots \times \{0\}$	1
$\{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_i = 0\}$	1
$\mathbb{R}^N \backslash (]1,3[\times]2,5[\times \mathbb{R}^{N-2})$	1
Ensemble compact	1

Un étudiant cite $[0,1] \times \cdots \times [0,1]$ et un autre donne $]-\infty, a]$.

Conclusion

Tous les étudiants de troisième année ne sont pas capables de donner un exemple « non classique » d'ensemble ouvert ou fermé. Cependant, la plupart des exemples donnés sont écrits de façon originale dans le sens où ce ne sont pas les premiers exemples qui viennent à l'esprit du mathématicien en matière d'ensembles ouverts ou fermés.

▶▶ Question 3

Pour cette question, les étudiants sont séparés en deux groupes.

□ Groupe 1 : 7 étudiants

① $\mathrm{adh}(A \cup B) \ldots \mathrm{adh}\, A \cup \mathrm{adh}\, B$

Compléter	7 étudiants
Répondre « $=$ »	5 étudiants
Justifier	5 étudiants
Justifier correctement	3 étudiants

② $\mathrm{adh}(\bigcup_{i=1}^{5} A_i) \ldots \bigcup_{i=1}^{5} \mathrm{adh}\, A_i$

Compléter	7 étudiants
Répondre « $=$ »	5 étudiants
Justifier	4 étudiants
Justifier correctement	3 étudiants

③ $\mathrm{int}(\bigcup_{i=1}^{5} A_i) \ldots \bigcup_{i=1}^{5} \mathrm{int}\, A_i$

Compléter	7 étudiants
Répondre « $\supseteq$ »	5 étudiants
Justifier	5 étudiants
Justifier correctement	1 étudiant

Tous les étudiants utilisent les définitions en termes de boules.

Pour la troisième proposition, quatre étudiants donnent un contre exemple pour l'inclusion $\subseteq$.

Les erreurs rencontrées concernent l'appartenance d'un point à une union d'ensembles. C'est la traduction du « ou » qui pose problème. Les questions sur l'adhérence sont mieux réussies. Il est vrai que la manipulation des définitions en termes de boules fait intervenir un quantificateur universel pour les ensembles fermés alors que c'est un quantificateur existentiel qui intervient pour les ensembles ouverts. C'est justement au niveau de ce problème d'existence que se situent les difficultés rencontrées par les étudiants.

□ Groupe 2 : 8 étudiants

① $\operatorname{int}(A \cap B) \ldots \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$

Compléter	8
Répondre « = »	6
Justifier	6
Justifier correctement	6

② $\operatorname{int}(\bigcap_{i=1}^{5} A_i) \ldots \bigcap_{i=1}^{5} \operatorname{int} A_i$

Compléter	8
Répondre « = »	6
Justifier	5
Justifier correctement	3

③ $\operatorname{adh}(\bigcap_{i=1}^{5} A_i) \ldots \bigcap_{i=1}^{5} \operatorname{adh} A_i$

Compléter	7
Répondre « $\subseteq$ »	5
Justifier	5
Justifier correctement	4

Une minorité d'étudiants tentent de prouver les inclusions « à la main » en utilisant les définitions en termes de suites ou de boules.

Pour deux ensembles, les étudiants utilisent les propriétés $A \subseteq B \Rightarrow \operatorname{int} A \subseteq \operatorname{int} B$ et $\operatorname{adh} A \subseteq \operatorname{adh} B$.

Conclusion

Les erreurs rencontrées consistent en des raisonnements logiques incohérents mais le problème majeur est de traduire l'appartenance d'un point aux différents ensembles. Pour la troisième proposition à compléter dans chaque questionnaire, celle qui porte sur l'intersection est mieux réussie. L'utilisation du connecteur « ou » est problématique.

Cette question n'est pas bien réussie et contrairement à l'objectif visé, les étudiants détaillent peu leur raisonnement, ils essaient plutôt d'utiliser des propriétés pour prouver les résultats qu'ils annoncent. L'intersection semble être mieux maîtrisée que l'union. Nous observons aussi que lorsqu'il s'agit de travailler avec deux ensembles A et B, la majorité des étudiants sont capables de manipuler le formalisme mais ils ont, comme les étudiants de deuxième année, des difficultés pour travailler avec des écritures plus complexes.

▶▶ Question 4

9 étudiants essaient d'utiliser deux méthodes pour résoudre l'exercice.

Méthodes	Etudiants	Rép. correctes
Complémentaire fermé avec les suites	9	9
Image réciproque d'un ouvert par une fonction continue	7	7
Définition d'ouvert en termes de boules + continuité en ε, δ	2	0

Un étudiant ne résout pas l'exercice. Deux étudiants répondent respectivement $E =]-\infty, a[$ et $\complement E = B[x,a]$ pour en conclure que E est ouvert.

Conclusion

La technique du passage au complémentaire en utilisant les suites est disponible, comme en seconde année. Un autre point commun dans les résultats des deux années est le fait que les étudiants qui utilisent la définition de continuité en ε, δ échouent. Ici, les étudiants pensent au résultat sur l'image réciproque d'un ouvert par une application continue. C'est un résultat établi en deuxième année qui n'avait pas du tout été utilisé par les étudiants dans notre première enquête.

▶▶ Question 5

Un étudiant a demandé, pendant le test, ce qu'était la nature topologique d'un ensemble.

14 étudiants répondent à la question. 8 étudiants essaient de justifier ce qu'ils affirment.

9 étudiants essaient de représenter graphiquement l'ensemble E mais les dessins ne sont corrects que chez 4 étudiants. La difficulté rencontrée est de positionner l'hyperbole par rapport au cercle.

8 étudiants répondent que l'ensemble E est fermé. 4 étudiants signalent que l'ensemble E n'est pas ouvert.

7 étudiants répondent que l'ensemble $E \cup \{(1/n, 1/n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ est fermé.

La méthode utilisée consiste à d'abord regarder l'ensemble E puis à lui ajouter les autres points.

Pour montrer que l'ensemble E est fermé, nous trouvons deux méthodes :

- □ Utiliser la définition d'ensemble fermé en termes de suites, chez deux étudiants.
- □ Se contenter de mentionner la présence d'inégalités larges dans la définition de E, ce qui est insuffisant comme justification, chez deux étudiants.

Pour montrer que l'ensemble $E \cup \{(1/n, 1/n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ est fermé, 4 étudiants se contentent de dire qu'on a ajouté la limite. Un étudiant pense que $\{(1/n, 1/n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ est fermé et en déduit que l'union est fermée.

Dans la définition de E, le « ou » est interprété comme vérifiant toujours les deux conditions. Nous trouvons beaucoup d'imprécisions dans les justifications des étudiants, semblables à celles déjà rencontrées : quantificateurs oubliés, manque de précision dans la définition de fermé en termes de suites où il n'est pas indiqué qu'on travaille avec des suites dans $E, \ldots$

Le fait que les étudiants se contentent de la présence d'inégalités larges pour justifier qu'un ensemble est fermé est surprenant à ce niveau d'études mais rejoint toutes les imprécisions rencontrées dans les réponses précédentes. Il s'agit d'un théorème en acte.

Les étudiants n'essaient pas non plus d'alléger les écritures. Ils rencontrent des difficultés pour traduire analytiquement une écriture contenant union et intersection. Par exemple, ils pourraient écrire que E est de la forme $A \cap (B \cup C)$ pour étudier la nature topologique de E mais aucun ne se lance dans ce type de démarche. L'absence d'une telle démarche entraîne des erreurs de logique et de raisonnement.

Conclusion : aucune solution n'est réellement convaincante.

Les étudiants sont très imprécis dans leurs justifications. Tout se passe comme s'ils recherchaient LE bon résultat du cours qui permet de résoudre l'exercice.

5 Interprétation des résultats

5.1 Synthèse des résultats

Le dépouillement du questionnaire montre que, globalement, les notions étudiées en première année sont peu disponibles.

Les étudiants sont très imprécis dans leurs productions. Plus aucun étudiant ne prend la peine de rappeler les définitions utilisées avant de démarrer un exercice. Ils se focalisent davantage sur l'organisation logique et sur les résultats à employer pour les justifications. Par exemple, à la question 5, pour montrer que l'ensemble est fermé, les étudiants n'ont retenu que la présence d'inégalités larges qui interviennent dans le passage à la limite. Pourtant, à la question 4, un raisonnement identique est utilisé et là, les étudiants manipulent correctement la définition d'ensemble fermé en termes de suites.

Le formalisme est correctement manipulé sur des écritures simples. Nous avons noté que les difficultés rencontrées lors de la manipulation d'écritures plus complexes sont liées au langage ensembliste et à la logique élémentaire. En effet, lorsqu'il y a plus de deux ensembles présents dans les écritures, les étudiants ne sont pas capables d'utiliser correctement les connecteurs logiques.

A la question 1, les définitions sont données dans $\mathbb{R}^N$ et dans le cadre des espaces topologiques. Pourtant, ce sont uniquement les définitions dans $\mathbb{R}^N$ qui sont utilisées pour résoudre les exercices. Les notions étudiées en deuxième année n'apparaissent donc que dans la question 1 et à la question 3 lorsqu'on demande deux techniques différentes aux étudiants.

D'un point de vue plus général, nous avons aussi observé que les étudiants ne s'interrogent pas sur l'utilité de ce qui leur est enseigné et qu'ils perçoivent le cours comme une succession de contenus qui sont nouveaux dans chaque année d'enseignement. Par exemple, le fait que les notions de deuxième année généralisent celles dans $\mathbb{R}^N$ n'est pas évoqué.

Enfin, le caractère abstrait des concepts enseignés et la quantité de définitions à retenir sont les difficultés majeures rencontrées par les étudiants.

5.2 Comparaison avec l'enquête réalisée en deuxième année

Nous retrouvons les mêmes types d'erreurs dans les deux enquêtes : des problèmes dans la restitution des définitions, des difficultés à manipuler le formalisme dans des écritures complexes et des imprécisions menant à des raisonnements ne pouvant être considérés comme corrects à ce niveau d'enseignement ou même faux.

Cependant, le phénomène de dégradation des connaissances, déjà observé en deuxième année, s'est accentué en ce sens que les imprécisions observées apparaissent déjà dans les définitions. Nous pensons que ce phénomène n'est pas surprenant. Au début de la deuxième année, les étudiants revoient la topologie de $\mathbb{R}^N$ mais ensuite, même si la majeure partie du cours est consacrée à la topologie, les étudiants ne travaillent que rarement dans $\mathbb{R}^N$. Par conséquent, les connaissances « anciennes » de première année ne sont pas réinvesties dans les « nouvelles » connaissances en deuxième année. Les étudiants ont donc peu de chance d'améliorer leur compréhension des concepts dans $\mathbb{R}^N$.

Il nous semble par contre plus difficile ici de mettre les résultats en rapport avec l'interprétation FUG des notions topologiques de première année. En effet, nous avons observé des problèmes semblables à ceux rencontrés dans l'enquête précédente mais nous pensons que l'enseignement de deuxième année a peut-être aussi joué un rôle dans les difficultés observées. Cependant, nous ne disposons pas de suffisamment de renseignements sur le cours d'analyse de deuxième année en termes de déroulement, en termes de contenus et en termes de gestion de la classe. Nous restons donc prudents quant à l'interprétation des résultats obtenus dans cette enquête.

Chapitre V

Un exercice proposé en DEUG MIAS, deuxième année

1 Introduction

Par l'intermédiaire de M. Rogalski, nous avons appris que des étudiants de DEUG MIAS, deuxième année, de l'Université des Sciences et Technologies de Lille, ont eu à résoudre, lors d'une évaluation en mai 2004, un exercice faisant intervenir des concepts topologiques. Nous avons eu accès aux copies des étudiants. Nous nous sommes demandée dans quelle mesure l'analyse de ces copies nous permettrait de retrouver certains des résultats établis dans nos propres enquêtes ou bien d'observer d'autres faits. Cette partie intervient donc dans notre travail par un pur hasard.

2 Contexte, public visé

Il s'agit d'un échantillon beaucoup plus important que dans les enquêtes précédentes puisque nous avons analysé 172 copies. Cependant, nous n'avons pas de renseignements sur le public en tant que tel, c'est-à-dire que nous ne connaissons ni le niveau des étudiants, ni l'organisation de l'enseignement. Nous disposons toutefois d'un résumé reprenant la théorie enseignée et d'une fiche d'exercices mais nous ne savons pas si ces exercices ont été résolus durant l'année d'enseignement qui nous concerne.

3 Énoncé du problème

L'évaluation comportait trois exercices pour une durée de quatre heures. Nous regardons l'exercice 2 dont voici l'énoncé.

> Soit X un sous-ensemble *compact* et *convexe* de $\mathbb{R}^N$.
> On considère une application $f : X \to \mathbb{R}^N$ vérifiant les hypothèses suivantes :

(i) On a $f(X) \subset X$,

(ii) Pour tous x et y de X, on a $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|$.

On se propose de montrer que f possède au moins un point fixe dans X, c'est-à-dire au moins un point a de X vérifiant $f(a) = a$.
Soit b un point quelconque choisi dans X. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit une application $f_n : X \to \mathbb{R}^N$ en posant, pour tout x dans X,

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x) + \frac{1}{n} f(b).$$

① Montrer que les applications f et f_n sont continues.

② Montrer que l'on a $f_n(X) \subset X$.

③ Dans cette question, on fixe n et on définit une suite $(x_p)_{p \geqslant 0}$ de points de X en posant $x_0 = b$ et $x_{p+1} = f_n(x_p)$ pour tout $p \geqslant 0$.

(a) Montrer que pour tout entier $p \geqslant 0$, on a

$$\|x_{p+1} - x_p\| \leqslant \alpha^p \|x_1 - x_0\|, \quad \text{avec} \quad \alpha = 1 - \frac{1}{n}.$$

(b) En déduire que l'on a, pour tous entiers $p \geqslant 0$ et $q \geqslant 0$,

$$\|x_{p+q} - x_p\| \leqslant \frac{\alpha^p}{1 - \alpha} \|x_1 - x_0\|.$$

(c) Montrer que la suite $(x_p)_{p \geqslant 0}$ converge dans $\mathbb{R}^N$.

La limite de $(x_p)_{p \geqslant 0}$ dépend du paramètre n qui a été fixé au début de la question ; pour cette raison, on la note a_n dans la suite de l'énoncé.

④ Montrer que quel que soit n, le point a_n appartient à X et vérifie $f_n(a_n) = a_n$.

⑤ En considérant une sous-suite convenable de $(a_n)_{n \geqslant 1}$, montrer que f admet un point fixe.

4 Inventaire des connaissances en topologie des étudiants

Avant d'analyser l'exercice, nous nous sommes intéressée au « passé topologique » des étudiants, c'est-à-dire quels sont les concepts topologiques qui ont été abordés en première et en deuxième année. Pour cela, nous avons accès à un syllabus résumant la théorie abordée dans le cours de mathématiques générales. Il reprend essentiellement les définitions et les propriétés des objets étudiés. Rien n'est spécifié sur les résultats qui sont démontrés et sur ceux qui sont éventuellement admis. Il n'y a pas non plus de renseignements sur les exercices se rapportant à la théorie.

4.1 Première année

Les concepts sont abordés dans $\mathbb{R}$. Un ensemble ouvert est défini comme étant une réunion (finie ou infinie) d'intervalles ouverts, un ensemble fermé est défini comme le complémentaire d'un ouvert. La notion de voisinage est aussi abordée.

Un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ est compact si de toute suite de points de E, on peut extraire une sous-suite convergente. Dans $\mathbb{R}$, les compacts sont les ensembles fermés et bornés. On établit aussi qu'un ensemble E est fermé si toute suite convergente de E a sa limite dans E.

4.2 Deuxième année

On passe à $\mathbb{R}^N$. Un ensemble ouvert est une réunion (finie ou infinie) de boules ouvertes, un ensemble fermé est le complémentaire d'un ouvert. On établit qu'un ensemble X est ouvert ssi $\forall x \in X, \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq X$. Par définition, l'adhérence de X est l'ensemble des points adhérents à X et l'intérieur de X est l'ensemble des points intérieurs à X.

Les ensembles compacts sont définis par la propriété de Bolzano-Weierstrass. On établit que, dans $\mathbb{R}^N$, les compacts sont les ensembles bornés et fermés.

On s'intéresse aussi aux fonctions pour montrer que l'image d'un compact par une fonction continue est un compact et que toute fonction continue sur un compact atteint ses bornes.

5 Analyse a priori du problème

① □ Continuité de la fonction f :

L'étudiant peut utiliser la définition en ε, δ. Grâce à l'hypothèse (ii), $\delta = \varepsilon$ convient. Une autre façon de procéder est de remarquer que l'hypothèse (ii) signifie que f est lipschitzienne de constante 1. On conclut en utilisant le fait que toute fonction lipschitzienne est continue.

□ Continuité de la fonction f_n :

L'étudiant peut ici aussi utiliser la définition en ε, δ. On montre que $\forall x, y \in X, \|f_n(x) - f_n(y)\| \leqslant \|f(x) - f(y)\|$. Une autre méthode consiste à remarquer que f_n est une somme de fonctions continues.

Ce point fait donc intervenir la manipulation d'une définition ou l'utilisation d'un résultat établi au cours.

② $f_n(X) \subset X$.

Un point quelconque de $f_n(X)$ est de la forme $f_n(x)$ avec $x \in X$. L'hypothèse (i) permet d'en déduire que $f(x)$ et $f(b)$ sont des éléments de X, et la convexité de X implique que le segment d'extrémités $f(x)$ et $f(b)$ est inclus à X, ce qui montre que $f_n(x)$ est un élément de X.

Cette question demande de maîtriser la définition de convexité.

③ □ (a) Il s'agit d'une preuve par récurrence.

□ (b) Il faut introduire les éléments intermédiaires entre x_p et x_{p+q}. Ensuite, on applique l'inégalité triangulaire pour obtenir des différences entre deux termes consécutifs. On applique alors à chaque terme l'inégalité démontrée au point précédent. Après mise en évidence, la constante $\|x_1 - x_0\|$ est multipliée par une somme de termes consécutifs d'une série géométrique. Cette somme peut être majorée par $1/(1-\alpha)$ en utilisant le résultat $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n + \cdots = 1/(1-\alpha)$ si $|\alpha| < 1$. Ce point nécessite une organisation des raisonnements, il faut utiliser ce qui a été fait précédemment et penser au résultat sur les séries géométriques pour majorer correctement.

□ (c) L'inégalité établie en (b) entre deux éléments x_p et x_{p+q} doit faire penser à la notion de suite de Cauchy. Grâce à la complétude de $\mathbb{R}^N$, montrer que (x_p) converge revient à montrer que (x_p) est de Cauchy. Comme $\alpha^p \to 0$ si $|\alpha| < 1$, on a que pour $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1, \forall n \geqslant n_1, \alpha^p \leqslant (1-\alpha)/\|x_1 - x_0\| \leqslant \varepsilon$. En prenant $n_0 = n_1$, on a bien $\forall p, q \geqslant n_0, \|x_{p+q} - x_p\| \leqslant \varepsilon$. On en déduit que $x_p \to a_n$ pour un certain $a_n \in \mathbb{R}^N$.

On demande ici qu'un certain nombre de connaissances soient disponibles. On ne parle pas dans l'énoncé de « suite de Cauchy ». C'est la majoration établie en 3(b) qui doit y faire penser. Il y a donc ici un saut de complexité.

④ On utilise le fait qu'un compact de $\mathbb{R}^N$ est fermé et borné et que dans un ensemble fermé, toutes les suites convergentes ont leur limite dans l'ensemble.

La continuité de f_n implique $f_n(x_p) \to f_n(a_n)$. Il faut ensuite remarquer que les suites $(x_p)_{p\geqslant 0}$ et $(f_n(x_p))_{p\geqslant 0}$ sont identiques à un décalage d'indices près. Par unicité de la limite, on en déduit que $f_n(a_n) = a_n$.

C'est l'utilisation de résultats du cours qui permet de résoudre ce point.

⑤ On teste encore les connaissance vis-à-vis de la compacité. La notion de sous-suite est à raccrocher à la propriété de Bolzano-Weierstrass. On peut extraire de la suite (a_n) une sous-suite (a_{n_k}) qui converge vers $a \in X$. Il y a ici aussi un saut de complexité : il faut pouvoir imaginer que la sous-suite converge.

Du point précédent, on a $f_n(a_{n_k}) = a_{n_k}$ mais cette égalité n'implique pas de façon évidente que $f(a) = a$. On peut imaginer que cette erreur sera fréquemment commise.

Pour montrer que $f(a) = a$, on développe $f(a) - a$ en fonction des résultats établis tout au long de l'exercice.

On a : $f(a) - a = f(a) - f(a_{n_k}) + f(a_{n_k}) - f_{n_k}(a_{n_k}) + f_{n_k}(a_{n_k}) - a_{n_k} + a_{n_k} - a$. Il faut ici développer de façon adéquate pour conclure. Ce point met aussi en jeu tous les résultats établis précédemment.

6 Résultats

▸▸ Question 1

147 étudiants répondent à la question. Les résultats sont repris dans les tableaux ci-dessous. Le premier tableau concerne la fonction f et le second porte sur la fonction f_n.

Continuité de f	Etudiants	Réponses correctes
Définition en ε, δ	70	43
Fonction lipschitzienne	18	16
(X compact et $f(X) \subseteq X) \Rightarrow f$ continue	23	0 [1]

Continuité de f_n	Etudiants	Réponses correctes
Somme de fonctions continues	118	59

19 étudiants ne manipulent pas correctement la définition en ε, δ. Ils choisissent la valeur du ε et écrivent « on prend $\varepsilon = \delta$ ». Dans l'utilisation du résultat sur la continuité des fonctions lipschitziennes, deux étudiants pensent que l'hypothèse (ii) est exactement la définition d'une fonction lipschitzienne. Comme le montre le tableau, 23 étudiants pensent que l'inclusion et le fait que X soit compact suffisent pour garantir la continuité de f. 11 étudiants pensent que toute fonction définie sur un ensemble compact ou convexe est forcément continue.

Pour la continuité de la fonction f_n, 54 étudiants considèrent les facteurs $1/n$ et $1 - 1/n$ comme des fonctions qui dépendent de la variable n. Il y a aussi une confusion entre les mots « somme » et « composée » de fonctions.

Certains étudiants se contentent de dire que f_n est une somme de fonctions continues, nous ne savons donc pas comment ils justifieraient la continuité de chaque terme. Ces réponses ont été considérées comme correctes.

Nous trouvons les justifications suivantes :

- □ $1/n$ et $1 - 1/n$ sont des fonctions continues.
- □ $1/x, x \neq 0$ est une fonction continue. Donc $1/n$ aussi.
- □ f est continue. Donc $f(b)$ aussi.
- □ b est continue. Donc $f(b)$ aussi.
- □ f est continue en tout point de X. Or, $b \in X$. Donc $f(b)$ aussi.

▸▸ Question 2

Nous n'avons pas analysé cette question car nous ciblons, dans ce travail, les concepts abordés en première année dans notre enseignement et la convexité n'en fait pas partie.

[1] « X compact et $f(X) \subseteq X$ » n'implique en aucun cas la continuité de f.

▶▶ Question 3

108 étudiants répondent à la question.

□ (a) Nous n'avons pas analysé ce point car les preuves par récurrence ne sont pas en lien avec les concepts qui nous intéressent.

□ (b) Nous n'avons pas regardé ce point car il s'agit d'une question calculatoire. Nous sortons, ici encore, du cadre de notre travail.

□ (c) La première méthode utilisée par les étudiants consiste à expliquer que l'inégalité de 3(b) implique que (x_p) est de Cauchy. Nous trouvons cette méthode chez 48 étudiants dont 38 justifient l'implication. Les résultats sont repris dans le tableau suivant.

Justification	Etudiants	Réponses correctes
Définition en ε, δ	20	8
$\alpha^p \to 0$ et convergence dominée	17	0 [2]

Pour le premier type de justification, nous trouvons beaucoup d'imprécisions qui font que la réponse ne peut être considérée comme correcte. En voici des exemples :

- On a $\|x_{p+q} - x_p\| \leqslant \dfrac{\alpha^p}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\| \leqslant \varepsilon$, donc (x_p) est de Cauchy.
- On prend $\varepsilon = \alpha^p/(1-\alpha)$, donc (x_p) est de Cauchy.
- Comme $\alpha^p \to 0$, on a $\|x_{p+q} - x_p\| \leqslant \varepsilon$.

L'utilisation de la définition en ε, n_0 est imprécise et surtout l'existence d'un indice n_0 à partir duquel on a $\forall p, q \geqslant n_0, \|x_{p+q} - x_p\| \leqslant \varepsilon$ n'apparaît nulle part.

Pour le second type de justification, la définition en ε, n_0 n'apparaît pas. Aucune justification n'est totalement rigoureuse et convaincante. Nous trouvons :

- $\|x_{p+q} - x_p\|$ est majorée par une suite qui converge vers 0. Donc (x_p) est de Cauchy.
- Par convergence dominée, on a $\|x_{p+q} - x_p\| \to 0$. Donc (x_p) est de Cauchy.
- Comme $\alpha^p \to 0$, (x_p) est de Cauchy.

Une autre méthode consiste à écrire que l'inégalité établie en (b) implique que (x_p) est majorée par une suite convergente. Par conséquent (x_p) converge. Ici, il n'y a aucune allusion à la notion de suite de Cauchy. 32 étudiants utilisent

[2] Tel qu'il est écrit, l'argument « $\alpha^p \to 0$ et convergence dominée » est insuffisant pour justifier que la suite est de Cauchy.

cette argumentation que nous ne considérons pas comme correcte. L'idée développée par ces étudiants est que comme $\alpha^p \to 0$, on a $\lim \|x_{p+q} - x_p\| = 0$. Donc, $\lim x_{p+q} = \lim x_p = a_n$.

Enfin, la quasi-totalité des étudiants qui ont parlé de suite de Cauchy en déduisent la convergence grâce à la complétude de $\mathbb{R}^N$.

▸▸ Question 4

94 étudiants répondent à la question. Parmi les raisonnements corrects, nous trouvons :

- □ Chez 17 étudiants : X est compact, donc X est fermé. La limite de la suite appartient à X.
- □ Chez 19 étudiants : X est compact, donc la limite appartient X. Ici, nous ne trouvons pas le lien entre ensemble compact et ensemble fermé mais nous avons considéré cette justification comme correcte.
- □ Chez 7 étudiants : Utiliser la compacité pour extraire une sous-suite qui converge vers un point de X. La limite de la suite appartient donc à X.
- □ Chez 29 étudiants : Comme $x_p \to a_n$ et que $x_{p+1} = f_n(x_p) \to a_n$, on en conclut que $f_n(a_n) = a_n$ par la continuité de f_n et par unicité de la limite.

Le raisonnement faux suivant est présent chez 31 étudiants : Comme on a $f_n(X) \subset X$, on a directement $a_n \in X$ et $f_n(a_n) = a_n$.

12 étudiants écrivent $\lim \|x_{p+1} - x_p\| = 0$, c'est-à-dire, $\lim \|f_n(x_p) - x_p\| = 0$. Donc $\|f_n(a_n) - a_n\| = 0$.

▸▸ Question 5

36 étudiants répondent à la question. Aucune solution n'est correcte. Parmi les justifications les plus fréquemment utilisées, nous avons :

- □ Chez 5 étudiants : Utiliser la compacité pour extraire la sous-suite. Le point fixe est alors la limite de cette sous-suite, sans autre précision.
- □ Chez 10 étudiants : Utiliser la compacité pour extraire la sous-suite. On a donc $a_{n_k} \to \rho$. De $f_n(a_{n_k}) = a_{n_k}$, on déduit $f(\rho) = \rho$.
- □ Chez 4 étudiants : L'égalité $f_n(a_n) = a_n$ implique directement $f(a) = a$.
- □ Chez 9 étudiants : La démarche consiste à choisir le point point fixe. Par exemple, prendre $a = x_0$ ou $a = b$.

7 Interprétation des résultats

7.1 Synthèse des résultats

Un des aspects les plus frappants du dépouillement est que les étudiants ne maîtrisent pas la notion de convergence. Ils ne sont pas capables de l'utiliser pour montrer qu'une suite est de Cauchy. Nous avons trouvé beaucoup d'imprécisions dans les copies. Par exemple, les étudiants se focalisent sur l'inégalité $\|x_{p+q} - x_p\| \leqslant \varepsilon$ et ne s'intéressent pas aux indices pour lesquelles celle-ci est vérifiée. L'existence d'un indice, noté n_0, à partir duquel l'inégalité est satisfaite est absente.

Les résultats du cours sont eux aussi utilisés de façon imprécise. Nous pensons au théorème de la convergence dominée. Les étudiants justifient aussi en énonçant des résultats faux.

Le manque de détails induit une perte de sens jusqu'à un point où la réponse peut en devenir incorrecte. Nous retrouvons cette idée que les détails ne sont pas l'objectif premier des étudiants.

Le dépouillement montre aussi que les étudiants essaient coûte que coûte de se rattacher aux résultats du cours pour trouver la justification correcte. Il y a là un effet de contrat.

Les étudiants utilisent les théorèmes de façon automatique dans le seul souci de justifier, mais cette profusion de résultats algorithmisés et parfois faux, finit par nuire à la compréhension des bases, comme nous le voyons ici.

7.2 Lien avec nos enquêtes

Il y a des similitudes dans les copies des étudiants de Lille et celles de nos étudiants. Nous pensons tout d'abord au phénomène d'imprécision que nous avions relevé dans nos deux enquêtes. Des difficultés sont aussi ici observées dans la manipulation de la définition de convergence. Nous les rapprochons des difficultés, chez nos étudiants, à manipuler une écriture dans laquelle les données sont générales. Enfin, nous retrouvons dans tous les dépouillements une stratégie chez les étudiants qui consiste à chercher parmi tous les résultats du cours celui qui permet de résoudre l'exercice, quitte à en inventer un soi-même si on ne le retrouve pas plutôt qu'adapter.

Chapitre VI

Bilan des résultats obtenus

1 Questions

Au départ de cette recherche se trouve un questionnement de l'enseignant qui essaie de comprendre pourquoi l'enseignement de la topologie en première année d'université pose des difficultés aux étudiants. Du point de vue du didacticien, nous nous sommes posée la question suivante :

> Question 1 : quelles sont les spécificités des concepts topologiques et quelles difficultés ceux-ci peuvent-ils poser à ce niveau d'enseignement ?

Nous nous sommes appuyée sur le fait que ces concepts sont porteurs d'un formalisme nouveau pour les interpréter en termes de notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices (notions FUG). Une difficulté d'enseignement de telles notions est que le travail sur le nouveau formalisme est en rupture avec les connaissances antérieures. D'où la question de savoir à quelle conceptualisation peut mener ce travail ? Nous avons donc précisé notre questionnement pour étudier une seconde question :

> Question 2 : que produit l'interprétation FUG des concepts topologiques dans l'analyse de leurs difficultés d'enseignement en termes de formalisation et de conceptualisation ?

Pour tenter de répondre à ces deux questions, notre travail a consisté en l'exploration des voies suivantes :

- un diagnostic de notre enseignement,
- l'élaboration de questionnaires proposés aux étudiants de deuxième et de troisième années dans notre institution.

2 Synthèse des résultats

En réponse à la question 1, nous avons dégagé des spécificités des concepts topologiques grâce à l'analyse de notre enseignement menée au chapitre II. Cette analyse a d'abord montré l'isolement des concepts au sein du cours. Ils sont introduits par leurs définitions, ils n'ont pas de liens avec les chapitres précédents et ils ne sont pas réinvestis par la suite. Comme les étudiants ne disposent pas de connaissances en topologie provenant de l'enseignement secondaire, il s'agit pour eux d'une discipline complètement nouvelle à maîtriser dans un temps très court. L'isolement des concepts au sein du cours est caractéristique des notions FUG.

Ensuite, nous avons relevé que chaque concept est défini de plusieurs façons (équivalentes) et avec un formalisme varié puisqu'il mélange différents registres d'écritures.

Le diagnostic établi au chapitre II met aussi en évidence que la finalité de notre enseignement est que les étudiants soient capables de manipuler le formalisme qui apparaît dans les définitions, ce qui se ramène à manipuler une écriture quantifiée. Nous avons pu préciser les difficultés liées à ce travail sur les définitions en relation avec l'interprétation FUG des concepts et ainsi fournir des éléments de réponse à la question 2.

Les exercices proposés aux étudiants sont des tâches simples et isolées puisqu'il s'agit essentiellement d'appliquer les définitions. Par contre, les activités mises en jeu pour résoudre ces tâches nécessitent des adaptations nombreuses et variées qui sont souvent implicitement cachées dans les définitions. Différentes étapes sont à envisager dans tous les exercices, des choix sont à effectuer (problèmes d'existence), des informations doivent être interprétées pour poursuivre l'exercice, ce qui fait apparaître d'autres quantificateurs que ceux déjà présents dans la définition (par exemple, pour prouver une inclusion d'ensembles). Des intermédiaires sont fréquemment introduits et il faut articuler différents arguments pour aboutir à ce qu'il faut prouver. De nombreuses initiatives sont donc laissées à la charge de l'étudiant. De plus, bien que les tâches soient proposées dans le cadre de la topologie, ce sont les cadres de la logique élémentaire et de la théorie des ensembles qui sont mobilisés dans les activités. Les connaissances utilisées dans les activités portent sur les inégalités, l'ordre dans $\mathbb{R}$, la convergence de suites, des résultats sur les passages à la limite, la continuité de fonctions. Les rares connaissances en topologie utilisées ne sont pas des connaissances avancées : propriété $\mathrm{int}E \subseteq E \subseteq \mathrm{adh}E$, définitions d'intérieur et d'adhérence.

Une difficulté d'enseignement des concepts topologiques est donc liée au décalage entre les tâches proposées, simples et isolées, et les activités mises en jeu qui relèvent d'un niveau de connaissances disponibles. Une autre source de difficulté est que le degré de disponibilité des connaissances nécessaires pour résoudre les exercices n'est pas atteint car ce sont des connaissances de l'année en cours.

Nous pensons que ces résultats sont typiques des notions FUG. Le début de l'enseignement d'une FUG est un travail sur les définitions, donc une tâche a priori facile. Or, nous avons d'abord établi que ce travail engendre des activités compliquées en ce sens qu'elles mobilisent des connaissances antérieures supposées disponibles alors qu'elles ne le sont pas. Ensuite, ce travail ne nécessite pas de connaissances en topologie. En conclusion, le travail sur le formalisme des définitions a une fonctionnalité manipulatoire qui ne permet pas de revenir au sens des concepts. Les étudiants ne peuvent compter que sur leur mémoire pour retenir les définitions puisqu'ils travaillent sur un formalisme qui ne représente rien pour eux. La dynamique entre le formel et le conceptuel n'est donc pas productive.

Le problème de la prise de sens des concepts topologiques se confirme dans le dépouillement de nos enquêtes, aux chapitres III et IV. Du point de vue des étudiants, les difficultés les plus fréquemment citées sont l'abstraction des objets étudiés et la quantité de définitions à maîtriser, ce qui rejoint les problèmes précédemment évoqués. Des erreurs sont déjà repérées dans la restitution des définitions : des quantificateurs sont mal placés ou absents, une définition d'ensemble fermé donnée par plus de la moitié des étudiants est en fait vérifiée par tous les ensembles.

Le formalisme est correctement manipulé si les écritures sont simples mais des problèmes surgissent lorsque les écritures sont plus complexes. Nous avons montré que ces erreurs sont liées au mélange, dans une même écriture, de quantificateurs, de la logique et de la théorie des ensembles. Nous avons aussi observé que certains étudiants parviennent à manipuler une écriture qui n'a pas de sens.

Comme la dynamique entre la formalisation et la conceptualisation fonctionne mal, les étudiants ne donnent pas de sens aux objets manipulés et nous observons de nombreuses imprécisions dans leurs écritures, bien présentes en deuxième année et qui s'accentuent en troisième année. Les méthodes et / ou les résultats ne sont pas utilisés rigoureusement, des justifications sont données sous la forme de théorèmes en acte. Nous pensons que ce phénomène a plusieurs explications. Tout d'abord, nous savons, de par notre expérience d'enseignant, que fournir des détails et des justifications rigoureuses ne sont pas les objectifs premiers des étudiants. D'autre part, la dégradation observée est, selon nous, liée aussi à l'enseignement de première année. Comme les concepts topologiques ne sont pas réinvestis, les bases ne sont jamais renforcées ; les connaissances acquises en première année ne font donc que se détériorer au fil du temps. De plus, nous agissons souvent, à tort, comme si les étudiants étaient capables de rédiger les détails, nous laissons les « choses simples » à leur charge. Nos enquêtes ont aussi montré que les étudiants sont incapables de rédiger la solution d'un exercice avec la rigueur mathématique exigée à ce niveau d'enseignement.

3 Lien avec d'autres travaux

Nous reprenons ici les travaux évoqués au chapitre I, section 5, pour étudier quels sont leurs éventuels liens avec les résultats obtenus dans ce travail.

3.1 L'algèbre linéaire (J. L. Dorier, 1997)

Nous avons pu repérer des similitudes entre les concepts de l'algèbre linéaire et les concepts topologiques. Tout d'abord, nous avons des notions FUG dans les deux disciplines. Ensuite, des résultats semblables ont pu être établi grâce aux enquêtes réalisées. Nous pensons aux questions posées dans les enquêtes sur les conceptions des étudiants et sur les difficultés qu'ils rencontrent. Que ce soit pour la topologie ou pour l'algèbre linéaire, les étudiants les décrivent comme une succession de contenus mathématiques où les concepts étudiés restent des objets. Des difficultés liées à l'abstraction et à la diversité des définitions sont aussi repérées. Dans les exercices, nous avons trouvé des problèmes liés à la manipulation du formalisme mais aussi à un manque de connaissances en logique élémentaire et en théorie des ensembles.

Nous pensons néanmoins qu'une différence entre l'algèbre linéaire et la topologie réside dans l'existence d'un saut de complexité important dans la manipulation des concepts topologiques. Le décalage observé dans ce travail entre les tâches et les activités n'apparaît pas dans les travaux sur l'algèbre linéaire. Les concepts topologiques et ceux de l'algèbre linéaire semblent être, sur ce point, des notions FUG de natures différentes.

3.2 Un usage fonctionnel des symboles (M. Berger, 2004)

Dans l'état actuel de notre étude, nous n'avons pas de lien avec ce travail. M. Berger s'intéresse davantage à l'aspect enseignement des concepts. Pour approfondir l'étude des concepts topologiques, nous pensons qu'une voie à explorer consisterait à étudier comment une notion FUG peut être enseignée.

3.3 Technique et sens (D. Butlen, M. Pezard, 1996)

Nous avons retenu de ces travaux que le problème du sens des notions est déjà présent au niveau de l'enseignement primaire. Il confirme l'importance de la dynamique entre le formel et le conceptuel.

4 Portée, limites

Nous sommes évidemment prudents quant aux résultats obtenus dans nos enquêtes en raison du nombre restreint d'étudiants qu'elles concernent. Une autre limitation de nos résultats peut s'expliquer par le fait que nous ne sommes pas maître de l'enseignement étudié ici.

5 Perspectives de recherche

L'étude des concepts topologiques ouvre la porte à d'autres directions de recherche que nous présentons ici.

5.1 Les définitions

Nos enquêtes ont révélé des problèmes dans la restitution et la manipulation des définitions. Une voie à explorer pour préciser davantage ces difficultés serait de s'intéresser à la question de la perception générale d'une définition chez les étudiants.

Dans sa thèse, C. Ouvrier-Buffet[1] étudie les questions suivantes :

- Qu'est-ce-qu'une définition en mathématiques ?
- Quels sont les processus de construction d'une définition ?

A ce stade de notre travail, nous n'avons pas d'éléments concrets nous permettant de relier nos résultats avec ceux obtenus dans cette thèse.

5.2 Le symbolisme

Les définitions des concepts topologiques font intervenir différents registres d'écritures. Une autre perspective de recherche consiste à étudier davantage le rapport au symbolisme chez les étudiants.

Cette même question est étudiée dans la thèse de C. Bardini[2] dans le cas de la factorisation chez des élèves en fin de troisième année. La factorisation est essentiellement constituée de manipulations formelles. Elle est souvent associée, chez les élèves, à une tâche qui a peu de signification pour eux. Les règles utilisées pour transformer une écriture algébrique sont dépourvues de sens pour un grand nombre d'élèves. D'où la question de savoir comment les élèves perçoivent les expressions algébriques qu'ils manipulent et leurs éléments constitutifs. Une question semblable peut se poser à propos des concepts topologiques. C'est grâce à une analyse épistémologique du rapport au symbolisme algébrique que C. Bardini précise les difficultés rencontrées par des élèves de quatrième et de seconde à qui des tâches ont été proposées.

5.3 Des questions de gestion

Un autre axe de recherche s'intéresse au rôle de l'enseignant et au travail qu'il peut réaliser au sein de la classe. A. Robert et M. Rogalski (2002) étudient la question des activités des élèves en fonction des énoncés et de la gestion de la classe.

Lorsque l'enseignant propose des exercices en classe, sa fonction est double : il y a d'abord une phase de préparation, c'est l'enseignant qui choisit les énoncés. Vient ensuite une phase d'accompagnement des étudiants qui dépend des formes de travail adoptées en classe. A. Robert et M. Rogalski ont pu constater que les

[1] OUVRIER-BUFFET C. (2003), Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques, thèse de doctorat, Université Joseph Fourier–Grenoble 1.

[2] BARDINI C. (2003), Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique, thèse de doctorat, Université Paris 7.

accompagnements pendant les séances modifient souvent les tâches des élèves. Dans notre travail, nous avons soulevé les difficultés liées aux tâches proposées aux étudiants et aux activités engendrées. D'où l'intérêt d'étudier comment l'enseignant peut gérer ces activités en travaux dirigés.

5.4 Pistes d'activités

Pour amener les étudiants à donner du sens aux concepts enseignés, nous proposons un début d'activité que nous comptons développer. Nous faisons l'hypothèse que la communication entre pairs est susceptible d'améliorer la compréhension des concepts. Un jeu de communication serait donc envisagé où deux étudiants « truquent » une définition, par exemple en permutant deux quantificateurs ou bien en transformant un quantificateur existentiel en un quantificateur universel, pour ensuite proposer cette « fausse » définition à deux autres étudiants. Il s'agit alors, grâce à une discussion dans le groupe, de fournir une argumentation convaincante visant à expliquer pourquoi la définition n'est pas correcte.

Par exemple, un groupe pourrait proposer la définition suivante :

$$\text{Un ensemble } E \text{ est ouvert ssi } \exists r > 0, \forall x \in E,\ B(x,r) \subseteq E.$$

L'autre groupe aurait alors à expliquer pourquoi cette définition n'est pas correcte[3]. Bien entendu, un argument tel que « on a permuté les quantificateurs » ne serait pas admis.

Nous pensons que ce type de situation peut aider à restituer au formalisme son rôle associateur de sens.

Une autre idée serait de proposer aux étudiants des exercices où les concepts topologiques servent d'outils dans la solution. Cependant, le caractère FUG des notions nous permet de penser que de telles activités ne seront pas simples à concevoir.

5.5 Une comparaison des enseignements

Une dernière perspective de recherche s'appuie sur une comparaison des enseignements de topologie dans différentes universités belges et si possible, dans d'autres pays.

[3] Par exemple, $]0,1[$ ne vérifie pas la propriété « $\exists r > 0, \forall x \in E,\ B(x,r) \subseteq E$. »

Annexe A

Organisation de l'enseignement

L'enseignement universitaire belge propose un cycle de quatre années d'études réparties en deux années de candidatures et deux années de licences. Elles mènent à un diplôme de licencié.

Nous présentons ici l'organisation de l'enseignement de première année dans notre institution pour les sections qui nous concernent dans ce travail.

L'année académique démarre à la mi-septembre et se termine à la fin du mois de juin. Des évaluations sont organisées en janvier et en juin. Une session de rattrapage a lieu en août.

La plupart des cours sont scindés en des séances théoriques, données par un professeur, et des séances d'exercices ou des laboratoires, données par un assistant[1].

Tout au long de la première année, les étudiants des sections mathématique, physique et informatique sont groupés pour les cours suivants : analyse mathématique, algèbre linéaire, physique générale et informatique. Ensuite, selon les sections, les étudiants ont des cours spécifiques. L'analyse est le cours de mathématiques le plus volumineux dans chaque section.

[1] Poste occupé par tout étudiant qui réalise une thèse.

Annexe B

Tables des matières des cours d'analyse, première et deuxième années

1 Première année

Les notes de cours sont disponibles à l'adresse :
`http://math.umh.ac.be/an/analyseI.php`

▸▸ Limite et continuité

- Convergence des suites de nombres réels
  - Définition et propriétés
  - Limites d'inégalités
  - Sous-suites
- Limites au sens large
- Suites de Cauchy
- Supremum, infimum
- Suites monotones
- Propriété des intervalles emboîtés
- Normes
- Convergence des suites vectorielles
- Limites de fonctions et continuité
  - Limites
  - Continuité
  - Théorème des valeurs intermédiaires
- Notions de topologie
  - Intérieur, adhérence, ouvert, fermé
  - Union et intersection

▶▶ Compacité

- □ Définition
- □ Définitions équivalentes
- □ Théorème des bornes atteintes

▶▶ Dérivée des fonctions d'une variable

- □ Définitions et interprétations
- □ Propriétés
- □ Théorèmes de Rolle et de la moyenne
- □ Règle de L'Hospital
- □ Dérivées d'ordre supérieur

▶▶ Développement de Taylor

- □ Définitions
- □ Formule du reste
- □ Introduction aux séries

▶▶ Equations différentielles ordinaires linéaires

- □ Définitions
- □ Méthode des variables séparées
- □ EDO linéaires à coefficients constants
- □ Cas simples
- □ Equation homogène
- □ Solution particulière de $p(\partial)u = f(x)$
  - – μ n'est pas racine du polynôme caractéristique
  - – μ est racine du polynôme caractéristique

▶▶ Différentielle totale

- □ Définitions et interprétations
- □ Règles de calculs

2 Deuxième année

Annexe C

Axes d'analyse des contenus

Les analyses de tâches proprement dites : axe 3 (*analyses a priori, côté élèves, côté enseignant*)

Cette description est essentiellement mathématique, elle ne préjuge pas des activités des élèves en terme de mise en fonctionnement d'un savoir donné.

Troisième axe : *l'analyse des tâches (a priori)*

- □ Y a-t-il des étapes ? Les questions (éventuelles) sont-elles liées ou indépendantes ?
- □ Ouvertures de l'énoncé
  - La question est-elle ouverte ?
  - Une méthode (resp. un cadre, un registre) est-elle indiquée ? Quelles méthodes (resp. cadre, registre) peuvent, doivent être utilisées ? Y en a-t-il de meilleurs que d'autres ?
- □ Y a-t-il une modélisation à effectuer, y a-t-il un simple habillage ?
- □ Quel est le degré de décontextualisation de la tâche (exercice particulier, générique, mise en fonctionnement outil ou objet) ?
- □ Démonstrations
  - Quels types de raisonnement sont en jeu (application directe, logique élémentaire, raisonnement par l'absurde ou contraposée, raisonnement par récurrence, contre-exemple, condition nécessaire et/ou suffisante, raisonnement par analyse-synthèse) ?
  - Quel est le rôle spécifique du formalisme dans la démonstration ?
- □ Sur quoi porte l'énoncé (résultat, méthode, démarche) ?
- □ Quelle est la production demandée (graphique, formule, résultat numérique, vrai/faux, démonstration) ?
- □ Quels moyens de contrôle ont les élèves ?
- □ Y a-t-il des éléments implicites dans l'énoncé, notamment au niveau de problèmes d'existence ou d'unicité ou sur ce qui est à justifier ou de quantificateurs cachés ?

Quatrième axe : *les activités élèves attendues* (analyse a priori)

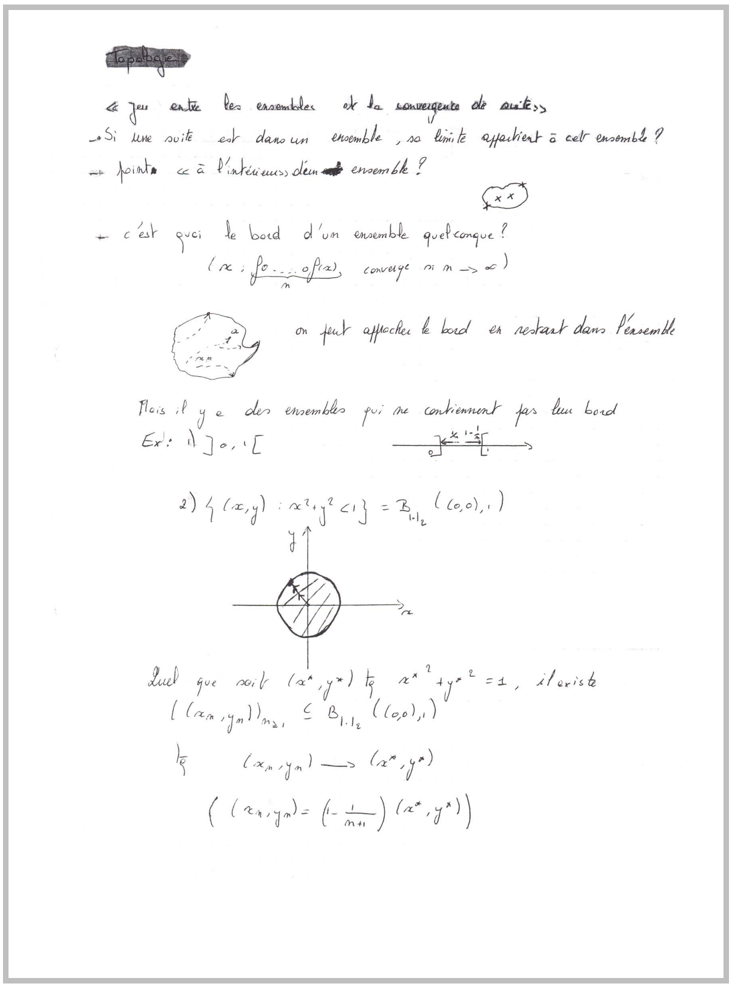
- □ Quel le niveau de fonctionnement visé (technique, mobilisable, disponible) ?
- □ Les calculatrices sont-elles utilisables ?
- □ Pour entrer dans la tâche :
  - Y a-t-il lieu de reconnaître (un type de problème, un type de justification, un type d'informations), de conjecturer (avec un dessin, un calcul,...), de modéliser, de faire des mises en relation, d'interpréter, de changer de cadres ou de registres, de points de vue —mathématiques ou autres ?
  - Faut-il choisir une méthode, un outil ?
- □ Pour résoudre la tâche :
  - Quels théorèmes ou raisonnements appliquer ?
  - Y a-t-il lieu d'introduire des étapes ?
  - Y a-t-il à développer plusieurs arguments à la fois, à répéter un argument, à gérer plusieurs variables à la fois ?

    Y a-t-il lieu pour utiliser le(s) théorème(s) (définition, propriété,...) de :
  - appliquer (contextualiser)
  - réappliquer deux ou plusieurs fois à la suite
  - reconnaître ou identifier, et appliquer
  - changer de point de vue
  - adapter et appliquer : il y a une modification à faire
  - transformer
  - sélectionner, perdre de l'information
  - introduire quelque chose (un intermédiaire, objet —un point — ou nom, ou formalisme, ou notation)
  - interpréter, mettre en relation, articuler deux ou plusieurs informations, faire une analogie
  - généraliser (décontextualiser), transférer...
- □ Pour rédiger : quelle production est prévue ?
  - Y a-t-il des écritures quantifiées à utiliser ?
- □ Y a-t-il lieu de se contrôler ? Comment ?

  Cela amène à déterminer plus globalement
- □ s'il y des initiatives à prendre (autrement dit s'il y a des connaissances disponibles supposées),
- □ le degré de « complication » (indice de complexité),
- □ le degré de nouveauté, la possibilité de généralisation...
- □ les risques de décalage entre activités attendues et tâches prescrites

Annexe D

La topologie de $\mathbb{R}^N$: notes d'un étudiant



Topologie

« jeu entre les ensembles et la convergence de suites »

- Si une suite est dans un ensemble, sa limite appartient à cet ensemble ?
- points « à l'intérieur » d'un ensemble ?

- c'est quoi le bord d'un ensemble quelconque ?

$(x : \underbrace{f \circ \dots \circ f(x)}_{n}$ converge si $n \to \infty)$

on peut approcher le bord en restant dans l'ensemble

Mais il y a des ensembles qui ne contiennent pas leur bord

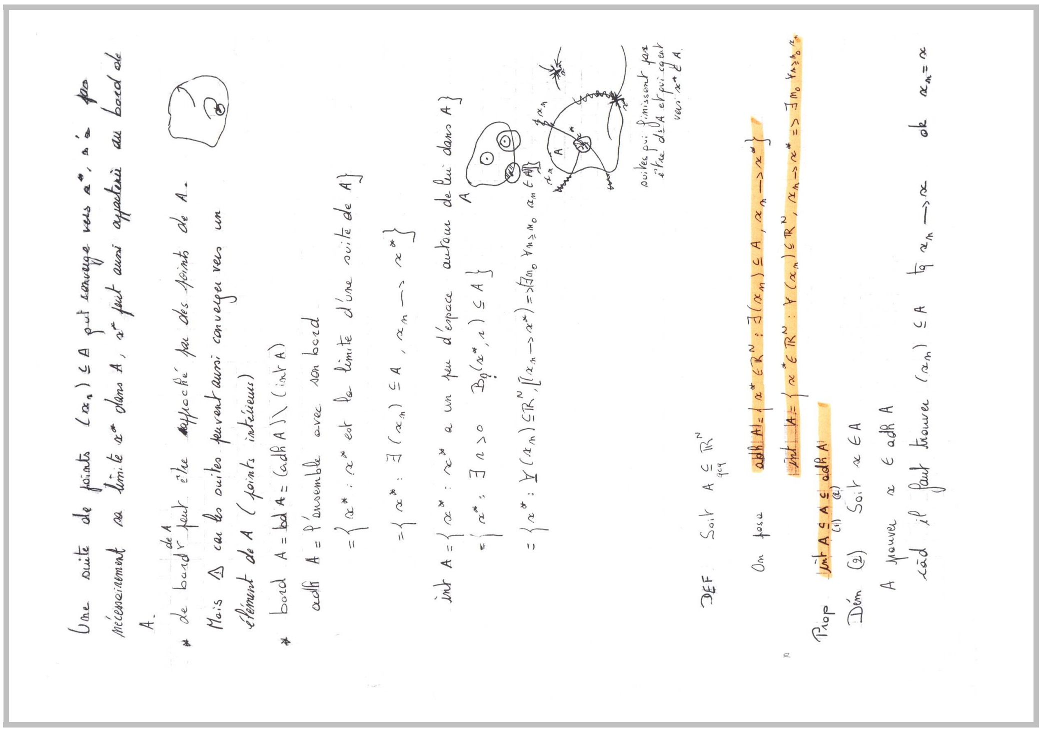
Ex : 1) $]0,1[$

2) $\{(x,y) : x^2+y^2<1\} = B_{\|\cdot\|_2}((0,0),1)$

Quel que soit (x^*,y^*) tq $x^{*2}+y^{*2}=1$, il existe $((x_n,y_n))_{n\geq 1} \subseteq B_{\|\cdot\|_2}((0,0),1)$

tq $(x_n,y_n) \longrightarrow (x^*,y^*)$

$\left((x_n,y_n) = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)(x^*,y^*) \right)$


Une suite de points $(x_n) \subseteq A$ peut converge vers x^*, n'a pas nécessairement sa limite x^* dans A, x^* peut aussi appartenir au bord de A.

* de bord de A peut être approché par des points de A.
Mais ⚠ car les suites peuvent aussi converger vers un élément de A (points intérieurs)

* bord A = bd $A = (\text{adh } A) \setminus (\text{int } A)$
adh A = l'ensemble avec son bord
$= \{x^* : x^* \text{ est la limite d'une suite de } A\}$
$= \{x^* : \exists (x_n) \subseteq A,\ x_n \to x^*\}$

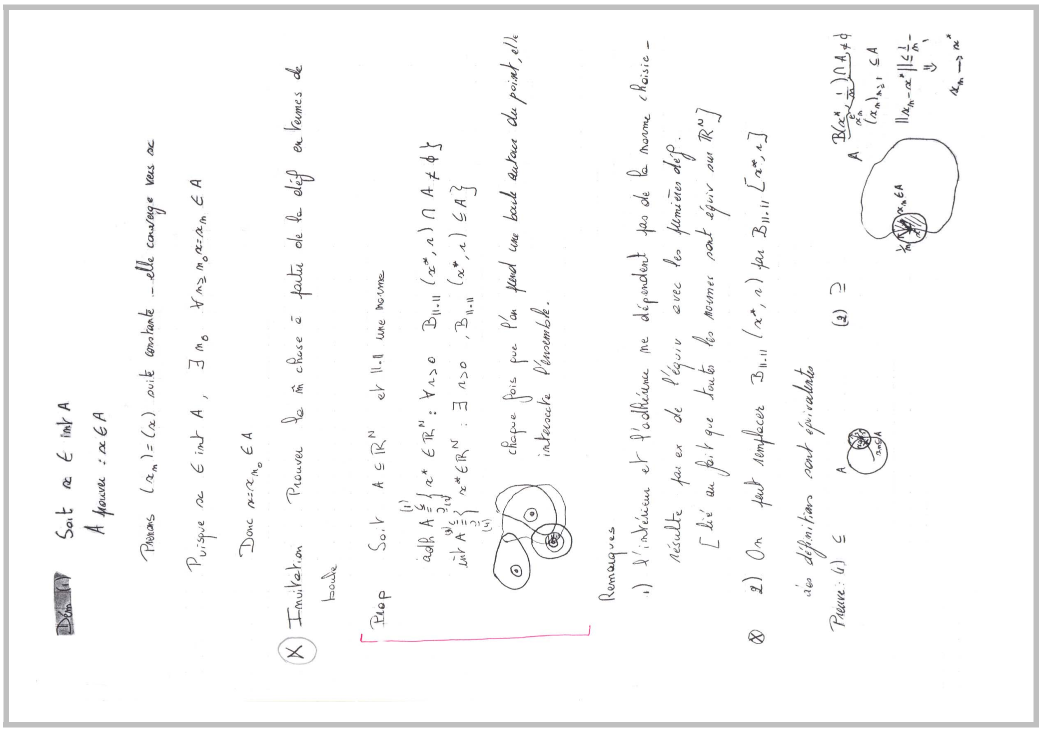
int $A = \{x^* : x^*$ a un peu d'espace autour de lui dans $A\}$
$= \{x^* : \exists r > 0 \quad B_0(x^*, r) \subseteq A\}$
$= \{x^* : \forall (x_n) \subseteq \mathbb{R}^N, [(x_n \to x^*) \Rightarrow \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ x_n \in A]\}$

suites qui finissent par être $\notin A$ et qui cgent vers $x^* \in A$.

DEF Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$ qcq

On pose $\text{adh } A := \{x^* \in \mathbb{R}^N : \exists (x_n) \subseteq A,\ x_n \to x^*\}$
$\text{int } A := \{x^* \in \mathbb{R}^N : \forall (x_n) \subseteq \mathbb{R}^N,\ x_n \to x^* \Rightarrow \exists n_0\ \forall n \geq n_0 \ldots\}$

Prop $\text{int } A \underset{(1)}{\subseteq} A \underset{(2)}{\subseteq} \text{adh } A$
Dém (2) Soit $x \in A$
A prouver $x \in \text{adh } A$
càd il faut trouver $(x_n) \subseteq A$ tq $x_n \to x$ ok $x_n = x$


Dém (1) Soit $x \in \text{int } A$
A prouver : $x \in A$

Prenons $(x_n) = (x)$ suite constante – elle converge vers x

Puisque $x \in \text{int } A$, $\exists n_0\ \forall n \geq n_0\ x = x_n \in A$

Donc $x = x_{n_0} \in A$

(X) Invitation Prouver la m̂ chose à partir de la déf en termes de boule

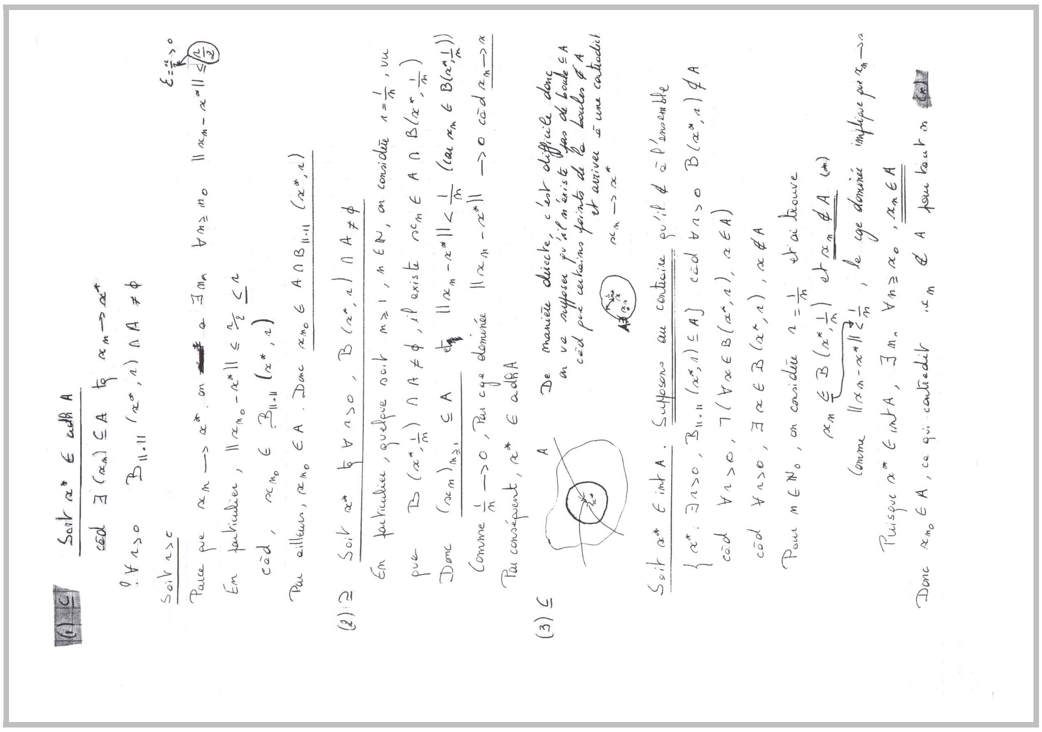
Prop Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$ et $\|\cdot\|$ une norme
$\text{adh } A \overset{(1)}{\underset{(2)}{\subseteq}} \{x^* \in \mathbb{R}^N : \forall r > 0 \quad B_{\|\cdot\|}(x^*, r) \cap A \neq \emptyset\}$
$\text{int } A \overset{(3)}{\underset{(4)}{\subseteq}} \{x^* \in \mathbb{R}^N : \exists r > 0,\ B_{\|\cdot\|}(x^*, r) \subseteq A\}$

chaque fois que l'on prend une boule autour du point, elle intersecte l'ensemble.

Remarques
1) l'intérieur et l'adhérence ne dépendent pas de la norme choisie – résulte par ex de l'équiv avec les premières déf.
[lié au fait que toutes les normes sont équiv sur $\mathbb{R}^N$]

⊗ 2) On peut remplacer $B_{\|\cdot\|}(x^*, r)$ par $B_{\|\cdot\|}[x^*, r]$
les définitions sont équivalentes

Preuve : (1) $\subseteq$ (2) $\supseteq$
$B(x^*, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$
$(x_n)_{n \geq 1} \subseteq A$
$\|x_n - x^*\| \leq \frac{1}{n}$
$\Downarrow$
$x_n \to x^*$



(1) $\subseteq$ Soit $x^* \in \operatorname{adh} A$

cèd $\exists (x_n) \subseteq A$ tq $x_n \to x^*$

? $\forall r > 0$ $B_{\|\cdot\|}(x^*, r) \cap A \neq \emptyset$

Soit $r > 0$ $\qquad \varepsilon = \frac{r}{2} > 0$

Parce que $x_n \to x^*$, on a $\exists n_0$ $\forall n \geq n_0$ $\|x_n - x^*\| \leq \frac{r}{2}$

En particulier, $\|x_{n_0} - x^*\| \leq \frac{r}{2} \leq r$

cèd, $x_{n_0} \in B_{\|\cdot\|}(x^*, r)$

Par ailleurs, $x_{n_0} \in A$. Donc $x_{n_0} \in A \cap B_{\|\cdot\|}(x^*, r)$

(2) $\supseteq$ Soit x^* tq $\forall r > 0$, $B(x^*, r) \cap A \neq \emptyset$

En particulier, quelque soit $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, on considère $r = \frac{1}{n}$, vu que $B(x^*, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$, il existe $x_n \in A \cap B(x^*, \frac{1}{n})$

Donc $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq A$ et $\|x_n - x^*\| < \frac{1}{n}$ (car $x_n \in B(x^*, \frac{1}{n})$)

Comme $\frac{1}{n} \to 0$, Par cge dominée $\|x_n - x^*\| \to 0$ cèd $x_n \to x^*$

Par conséquent, $x^* \in \operatorname{adh} A$

(3) $\subseteq$ A

De manière directe, c'est difficile donc on va supposer qu'il n'existe pas de boule $\subseteq A$ cèd que certains points de la boules $\notin A$ et arriver à une contradict $x_n \to x^*$

Soit $x^* \in \operatorname{int} A$. Supposons au contraire qu'il $\notin$ à l'ensemble

$\{x^* . \exists r > 0, B_{\|\cdot\|}(x^*, r) \subseteq A\}$ cèd $\forall r > 0$ $B(x^*, r) \not\subseteq A$

cèd $\forall r > 0$, $\neg(\forall x \in B(x^*, r), x \in A)$

cèd $\forall r > 0$, $\exists x \in B(x^*, r)$, $x \notin A$

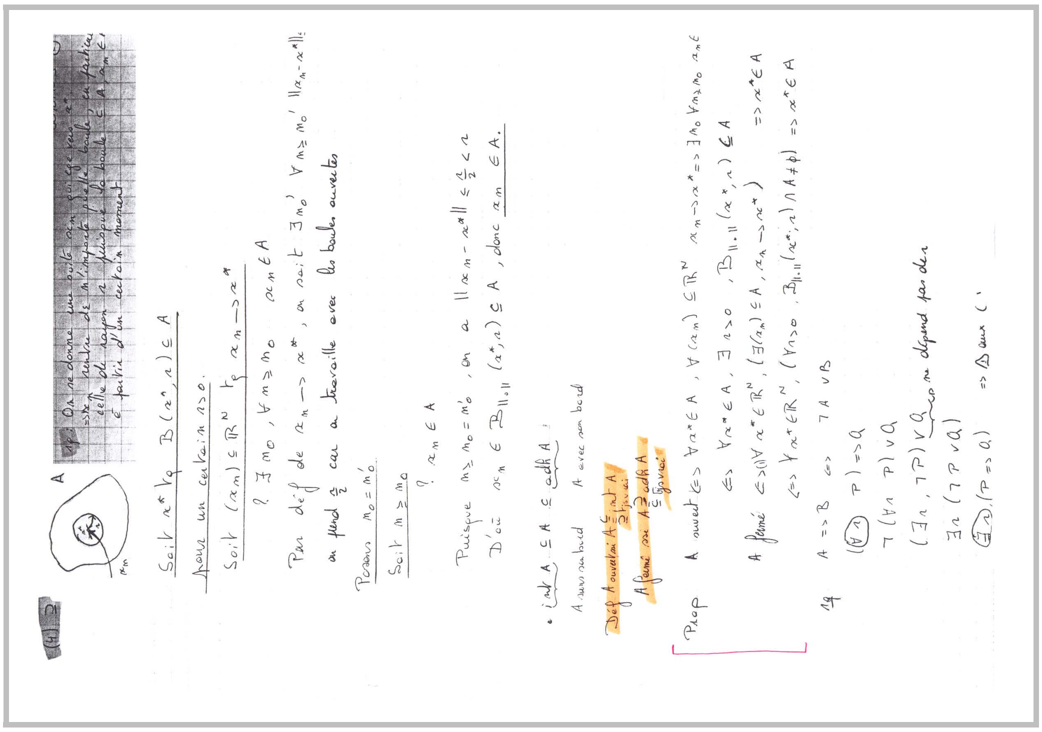
Pour $n \in \mathbb{N}_0$, on considère $r = \frac{1}{n}$ et on trouve

$x_n \in B(x^*, \frac{1}{n})$ et $x_n \notin A$ (*)

Comme $\|x_n - x^*\| \leq \frac{1}{n}$, le cge dominée implique que $x_n \to x$

Puisque $x^* \in \operatorname{int} A$, $\exists n_0$ $\forall n \geq n_0$, $x_n \in A$

Donc $x_{n_0} \in A$, ce qui contredit $x_n \notin A$ pour tout n (*)



(4) $\supseteq$ A

On se donne une suite x_n qui cge vers x^* $\Rightarrow x_n$ rentre de n'importe quelle boule, en particulier celle de rayon r puisque la boule $\subseteq A$, $x_n \in A$ à partir d'un certain moment

Soit x^* tq $B(x^*, r) \subseteq A$

pour un certain $r > 0$.

Soit $(x_n) \subseteq \mathbb{R}^N$ tq $x_n \to x^*$

? $\exists n_0$, $\forall n \geq n_0$ $x_n \in A$

Par déf de $x_n \to x^*$, on sait $\exists n_0'$ $\forall n \geq n_0'$ $\|x_n - x^*\| \leq$

on prend $\frac{r}{2}$ car on travaille avec les boules ouvertes

Posons $n_0 = n_0'$

Soit $n \geq n_0$

? $x_n \in A$

Puisque $n \geq n_0 = n_0'$, on a $\|x_n - x^*\| \leq \frac{r}{2} < r$

D'où $x_n \in B_{\|\cdot\|}(x^*, r) \subseteq A$, donc $x_n \in A$.

• $\operatorname{int} A \subseteq A \subseteq \operatorname{adh} A$:

A sans son bord $\qquad$ A avec son bord

Déf A ouvert ssi $A \subseteq \operatorname{int} A$ (toujours vrai $\supseteq$)

A fermé ssi $A \supseteq \operatorname{adh} A$ (toujours vrai $\subseteq$)

Prop A ouvert $\Leftrightarrow \forall x^* \in A$, $\forall (x_n) \subseteq \mathbb{R}^N$ $x_n \to x^* \Rightarrow \exists n_0 \forall n \geq n_0$ $x_n \in$

$\Leftrightarrow \forall x^* \in A$, $\exists r > 0$, $B_{\|\cdot\|}(x^*, r) \subseteq A$

A fermé $\Leftrightarrow (i) \forall x^* \in \mathbb{R}^N$, $(\exists (x_n) \subseteq A, x_n \to x^*)$ $\Rightarrow x^* \in A$

$\Leftrightarrow \forall x^* \in \mathbb{R}^N$, $(\forall r > 0$, $B_{\|\cdot\|}(x^*, r) \cap A \neq \emptyset) \Rightarrow x^* \in A$

rq $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

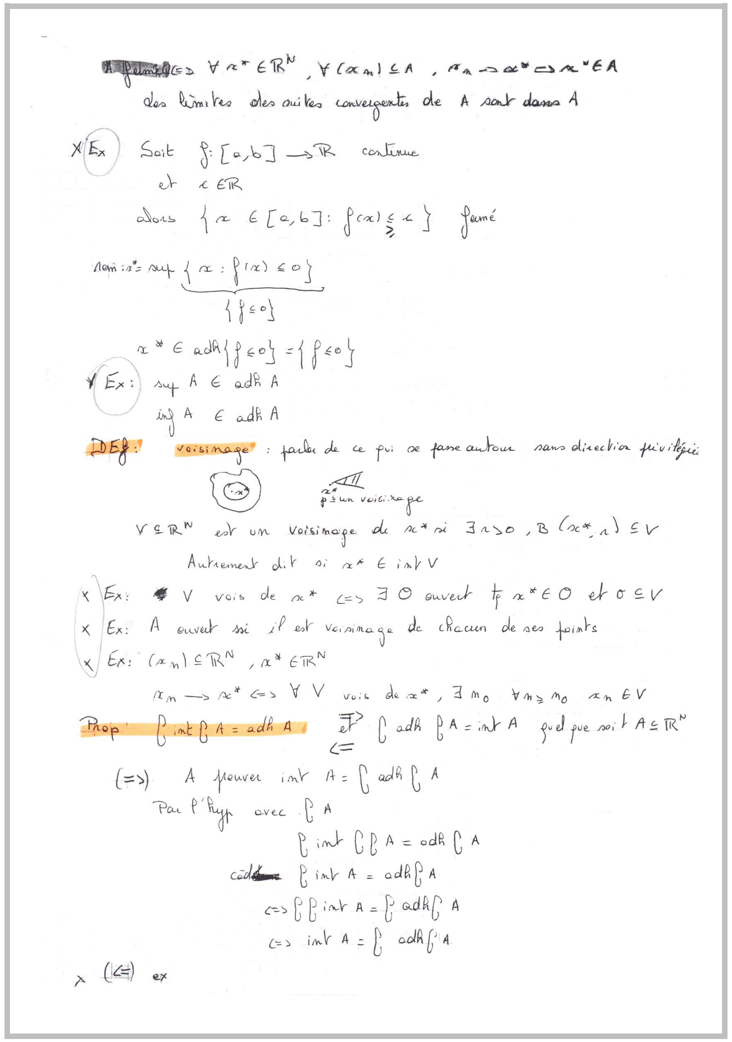
$(\forall r\ P) \Rightarrow Q$

$\neg(\forall r\ P) \vee Q$

$(\exists r, \neg P) \vee \underbrace{Q}_{\text{ne dépend pas de } r}$

$\exists r\ (\neg P \vee Q)$

$\exists r, (P \Rightarrow Q)$ $\Rightarrow$ Δ aux (



[redacted] $\Leftrightarrow \forall x^* \in \mathbb{R}^N, \forall (x_n) \subseteq A, x_n \to x^* \Rightarrow x^* \in A$

des limites des suites convergentes de A sont dans A

× Ex Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

et $\alpha \in \mathbb{R}$

alors $\{x \in [a,b] : f(x) \underset{\geq}{\leq} \alpha\}$ fermé

Nom : $x^* = \sup \underbrace{\{x : f(x) \leq 0\}}_{\{f \leq 0\}}$

$x^* \in \text{adh}\{f \leq 0\} = \{f \leq 0\}$

× Ex : $\sup A \in \text{adh } A$

$\inf A \in \text{adh } A$

DEF : voisinage : parler de ce qui se passe autour sans direction privilégiée

x^* p. un voisinage

$V \subseteq \mathbb{R}^N$ est un voisinage de x^* si $\exists r > 0, B(x^*, r) \subseteq V$

Autrement dit si $x^* \in \text{int } V$

× Ex : V vois de x^* $\Leftrightarrow \exists O$ ouvert tq $x^* \in O$ et $O \subseteq V$

× Ex : A ouvert ssi il est voisinage de chacun de ses points

× Ex : $(x_n) \subseteq \mathbb{R}^N$, $x^* \in \mathbb{R}^N$

$x_n \to x^* \Leftrightarrow \forall V$ vois de x^*, $\exists n_0$ $\forall n \geq n_0$ $x_n \in V$

Prop $\complement \text{ int } \complement A = \text{adh } A$ $\overset{\Rightarrow}{\underset{\Leftarrow}{\text{et}}}$ $\complement \text{ adh } \complement A = \text{int } A$ quel que soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$

($\Rightarrow$) A prouver $\text{int } A = \complement \text{ adh } \complement A$

Par l'hyp avec $\complement A$

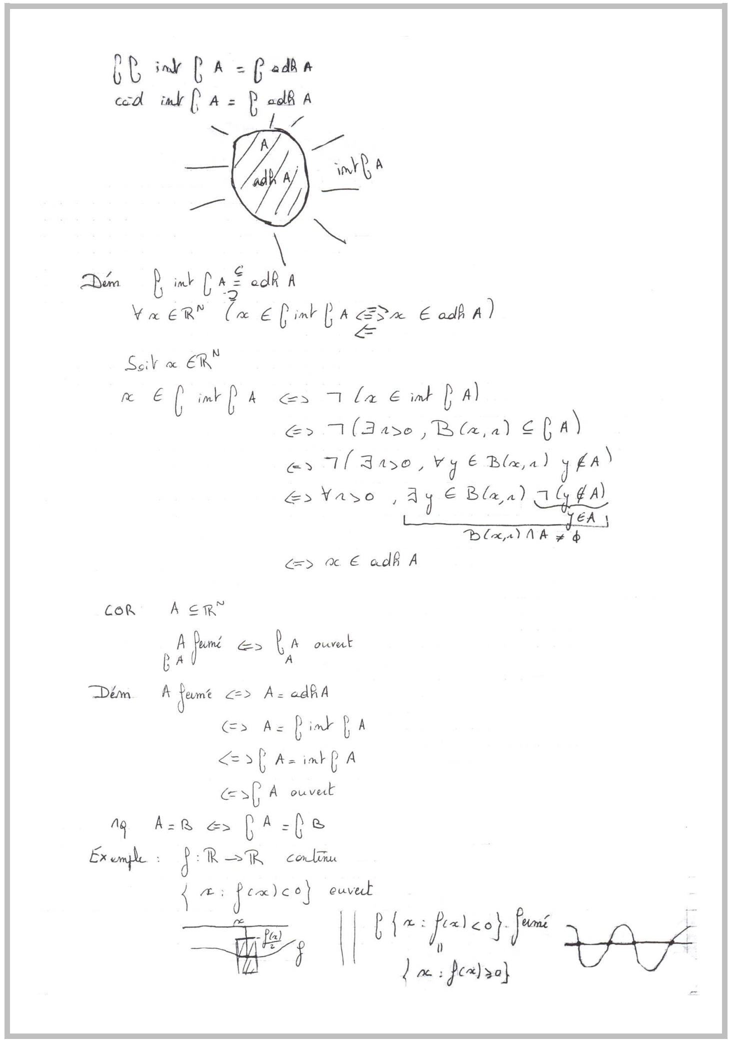
$\complement \text{ int } \complement \complement A = \text{adh } \complement A$

càd $\complement \text{ int } A = \text{adh} \complement A$

$\Leftrightarrow \complement \complement \text{ int } A = \complement \text{ adh} \complement A$

$\Leftrightarrow \text{int } A = \complement \text{ adh} \complement A$

× ($\Leftarrow$) ex



$\complement \complement \text{ int } \complement A = \complement \text{ adh } A$

càd $\text{int } \complement A = \complement \text{ adh } A$

Dém $\complement \text{ int } \complement A \overset{\subseteq}{\underset{\supseteq}{=}} \text{adh } A$

$\forall x \in \mathbb{R}^N$ $(x \in \complement \text{ int } \complement A \overset{\Rightarrow}{\underset{\Leftarrow}{\Leftrightarrow}} x \in \text{adh } A)$

Soit $x \in \mathbb{R}^N$

$x \in \complement \text{ int } \complement A \Leftrightarrow \neg (x \in \text{int } \complement A)$

$\Leftrightarrow \neg (\exists r > 0, B(x,r) \subseteq \complement A)$

$\Leftrightarrow \neg (\exists r > 0, \forall y \in B(x,r)\ y \notin A)$

$\Leftrightarrow \forall r > 0, \underbrace{\exists y \in B(x,r)\ \neg \underbrace{(y \notin A)}_{y \in A}}_{B(x,r) \cap A \neq \emptyset}$

$\Leftrightarrow x \in \text{adh } A$

COR $A \subseteq \mathbb{R}^N$

A fermé $\Leftrightarrow \complement_A$ ouvert

Dém A fermé $\Leftrightarrow A = \text{adh} A$

$\Leftrightarrow A = \complement \text{ int } \complement A$

$\Leftrightarrow \complement A = \text{int } \complement A$

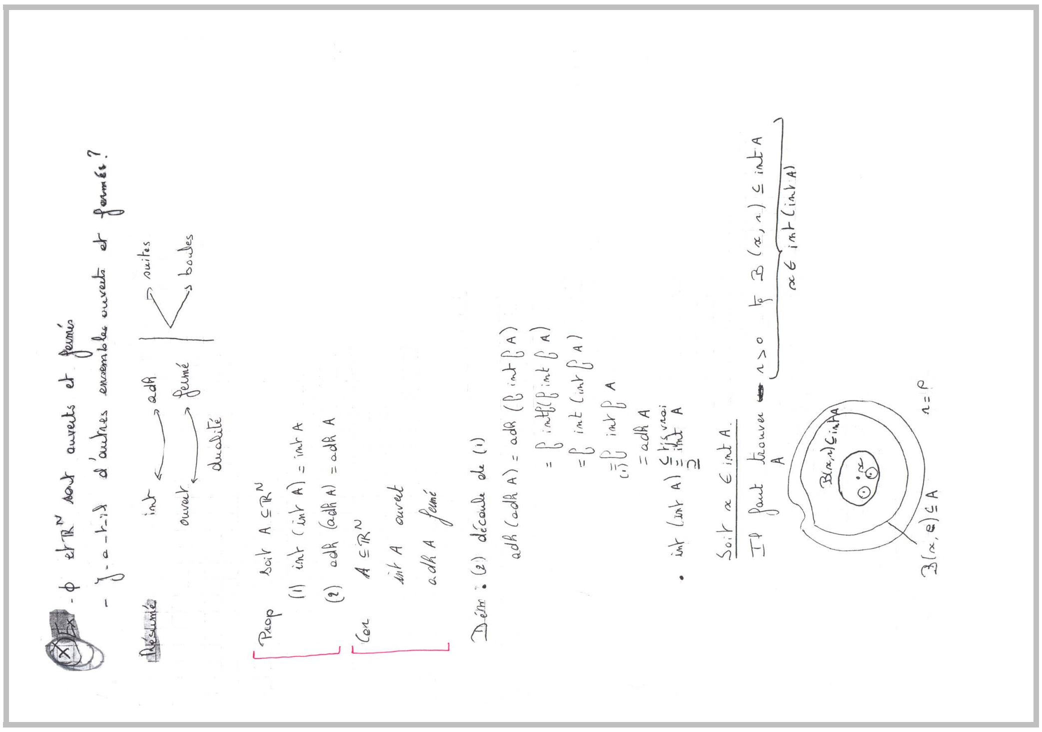
$\Leftrightarrow \complement A$ ouvert

rq $A = B \Leftrightarrow \complement A = \complement B$

Exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu

$\{x : f(x) < 0\}$ ouvert

$\complement \{x : f(x) < 0\}$ fermé
$= \{x : f(x) \geq 0\}$



Ex – $\emptyset$ et $\mathbb{R}^N$ sont ouverts et fermés

– y a-t-il d'autres ensembles ouverts et fermés ?

Résumé

int ⟷ adh

ouvert ⟷ fermé

dualité

suites

boules

Prop Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$

(1) $\mathrm{int}(\mathrm{int}\, A) = \mathrm{int}\, A$

(2) $\mathrm{adh}(\mathrm{adh}\, A) = \mathrm{adh}\, A$

Cor $A \subseteq \mathbb{R}^N$

$\mathrm{int}\, A$ ouvert

$\mathrm{adh}\, A$ fermé

Dém : (2) découle de (1)

$$\begin{aligned}\mathrm{adh}(\mathrm{adh}\, A) &= \mathrm{adh}(\complement\, \mathrm{int} \complement A)\\ &= \complement\, \mathrm{int} \complement(\complement\, \mathrm{int} \complement A)\\ &= \complement\, \mathrm{int}(\mathrm{int} \complement A)\\ &\overset{(1)}{=} \complement\, \mathrm{int} \complement A\\ &= \mathrm{adh}\, A\end{aligned}$$

• $\mathrm{int}(\mathrm{int}\, A) \overset{\text{tjs vrai}}{\subseteq} \mathrm{int}\, A$, $\supseteq$

Soit $x \in \mathrm{int}\, A$.

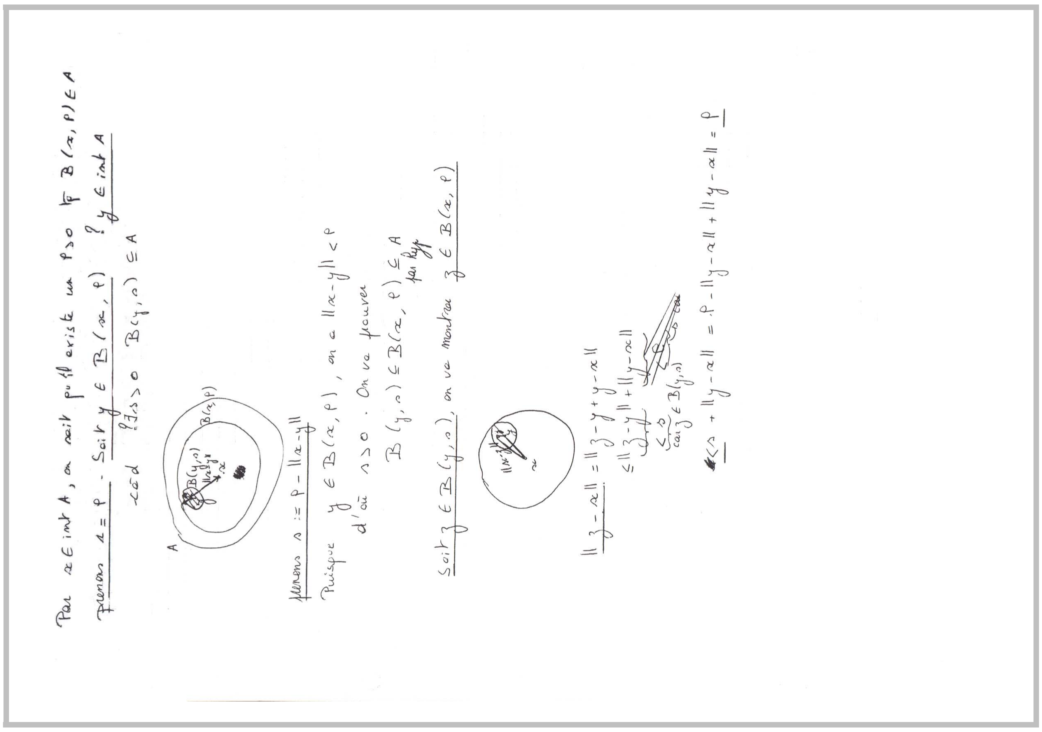
Il faut trouver $r > 0$ tq $\underbrace{B(x,r) \subseteq \mathrm{int}\, A}_{x \in \mathrm{int}(\mathrm{int}\, A)}$

A

$B(x,r) \subseteq \mathrm{int}\, A$

$B(x,\rho) \subseteq A$

$r = \rho$



Par $x \in \mathrm{int}\, A$, on sait qu'il existe un $\rho > 0$ tq $B(x,\rho) \subseteq A$

prenons $r = \rho$. Soit $y \in B(x,\rho)$? $y \in \mathrm{int}\, A$

c-à-d ? $\exists s > 0$ $B(y,s) \subseteq A$

A

$B(y,s)$

$B(x,\rho)$

$\|x-y\|$

x

prenons $s := \rho - \|x-y\|$

Puisque $y \in B(x,\rho)$, on a $\|x-y\| < \rho$

d'où $s > 0$. On va prouver

$B(y,s) \subseteq B(x,\rho) \underset{\text{par hyp}}{\subseteq} A$

Soit $z \in B(y,s)$, on va montrer $z \in B(x,\rho)$

$\|x-y\|$

x

$$\begin{aligned}\|z-x\| &= \|z-y+y-x\|\\ &\le \underbrace{\|z-y\|}_{< s \text{ car } z \in B(y,s)} + \|y-x\|\\ &< s + \|y-x\| = \rho - \|y-x\| + \|y-x\| = \rho\end{aligned}$$

Annexe E

Questionnaire sur les concepts de l’algèbre linéaire

NOM et PRENOM:

Etablissement fréquenté **l’an dernier** *(1986-1987):*

Eventuellement groupe de TD du 1^er^ et du 2^ème^ semestre:

QUELQUES QUESTIONS A PROPOS D’ALGEBRE LINEAIRE :

1. Vrai ou faux (justifier votre réponse) : v *et* u *étant deux applications linéaires d’un espace vectoriel dans lui-même :*

$v \circ u = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(v)$.

2. Quels exemples d’espaces vectoriels connaissez-vous ?

3. Soient A_1, A_2, A_3 *trois points du plan dont les coordonnées dans un repère sont respectivement* (a_1,b_1), (a_2,b_2), (a_3,b_3), *trouver les coordonnées des points* M, N, P *s’ils existent, tels que* A_1 *soit le milieu du segment* [MN], A_2 *celui de* [NP], A_3 *celui de* [PM]. *On notera* (x_1,y_1) *les coordonnées de* M, (x_2,y_2) *celles de* N, (x_3,y_3) *celles de* P.

4. Trouver les solutions lorsqu’elles existent du système réel suivant :

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = a_1 \\ X_2 + X_3 = a_2 \\ X_3 + X_4 = a_3 \\ X_4 + X_1 = a_4 \end{cases}$$

5. On considère l’espace vectoriel E *formé des polynômes à coefficients réels de degré au plus deux. Soit* f *l’application linéaire de* E *dans* E *qui au polynôme* P *associe le polynôme* Q = f(P) *défini par* $Q(X) = (2X+1)P(X) - (X^2-1)P'(X)$ *où* P’ *désigne le polynôme dérivé de* P. *Ecrire la matrice de f dans la base* $(1, X, X^2)$.

6. Si on vous demande d’expliquer en quoi consiste l’algèbre linéaire à un étudiant entrant en DEUG[1], *que lui dites-vous ?*

7. Quelles sont pour vous les difficultés de ce domaine des mathématiques?

1. Le DEUG (Diplôme d’Etudes Universitaires Générales) désigne l’enseignement dans les deux premières années à l’université en France.

Bibliographie

BERGER M. (2004) The Functional Use of a Mathematical Sign, *Educational Studies in Mathematics*, 55, 81–102.

BUTLEN D. ET PEZARD M. (1996) Rapports entre habileté calculatoire et « prise de sens » dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire, *Cahier de didactique des mathématiques* n° 27, Irem Paris 7.

DORIER J.L. (1997) Ed., L'enseignement de l'algèbre linéaire en question, *La pensée sauvage*, Grenoble.

DOUADY R. (1987) Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en didactique des mathématiques* 7(2), 5–32.

ROBERT A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en didactique des mathématiques* 18(2), 139–190.

ROBERT A. ET ROGALSKI M. (2002) Comment peuvent varier les activités des élèves sur des exercices ? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion de la classe, *Petit x* n° 60, 6–25.

ROBERT A. (2005) Deux exemples d'activités en formation des enseignants de mathématiques du second degré, *Petit x* n° 67, 63–76.