Mathématique Élémentaire

Examen (30 octobre 2000)

Nom :
Prénom :
Section :

- Veuillez commencer par écrire en lettres majuscules votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.
- Les *explications sont* aussi *importantes* que les résultats. Rappelez vous que nous ne voyons pas ce que vous pensez, seulement ce que vous avez écrit. Des expressions comme « on voit clairement que » sont donc, ici, vides de sens. Par exemple, si vous concluez quelque chose d'un graphique, expliquez comment vous faites — quitte à refaire une esquisse du dessin avec des annotations.
- Ne confondez pas la *rédaction* de vos réponses avec celle de vos brouillons !
- La grandeur des espaces laissés après les questions vous donne une *indication* sur la *longueur des réponses* attendue. N'employez *pas* le dos de la feuille *précédente* !

Question 1.

- Calculez $\displaystyle\sum_{\ell=7}^{n+1} \sqrt{2} =$

- Calculez
$$\prod_{k=-n}^{n} 2^k =$$
où $\prod$ est un symbole pour le produit, comme $\sum$ est un symbole pour la somme. Justifiez votre réponse.

Mathématique Élémentaire

Examen (30 octobre 2000)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. Calculez $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}$.

Mathématique Élémentaire

Examen (30 octobre 2000)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Soient les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : (s,t) \mapsto \sin(s/t) + \operatorname{tg} t$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \sigma \mapsto \sigma^2$. Calculez les expressions suivantes en donnant les détails qui permettent de suivre votre démarche.

- $\partial_s f(s,t) =$

- $\partial_t f(s,t) =$

- $\partial_s f(0,1) =$

- $\partial_s f\bigl(h(\sigma), \sigma\bigr) =$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4. Calculez le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \binom{n+1}{3} \\ 1 & \binom{n+2}{2} & \binom{n+2}{2} & \binom{n+2}{3} \\ 1 & \binom{n+3}{1} & \binom{n+3}{2} & \binom{n+3}{3} \end{vmatrix}$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5.

(a) Calculez, si possible, l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 10 \\ -y - z = -15 \\ 2x + y + 2z = -10 \end{cases}$$

L'efficacité de la méthode utilisée est importante.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6.

- Calculez les solutions (sous forme trigonométrique) de $x^5 - 1 = 0$.
- Représentez graphiquement ces solutions.
- Pour chacun des arguments θ des solutions, représentez les nombres $1 + \boldsymbol{i}\,\mathrm{tg}\,\theta$. Que vaut la somme de ces nombres ?

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7.

(a) Donnez la table de vérité de $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$.

(b) Donnez une formule équivalente à $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ n'utilisant que les connecteurs logiques $\wedge$, $\vee$ et $\neg$. Justifiez votre réponse.

(c) Donner, en bon français, la négation de :

Je vais me baigner si et seulement si il ne pleut pas.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. Donnez le domaine de définition de la fonction

$$f : \mathbb{R} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sqrt{|x|}\ \operatorname{tg} x}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$$

Justifiez votre réponse.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9. Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto f(x, y)$ une application linéaire et $M_f = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice associée à f.

(a) Calculez $f(-1, 1)$.

(b) Dans le plan cartésien $\mathbb{R}^2$ muni des deux vecteurs de base $(1, 0)$ et $(0, 1)$, déterminez l'image par f de la droite D passant par $(-1, 1)$ et de vecteur directeur $(2, -1)$. (Indication : écrivez l'équation paramétrique de D.)

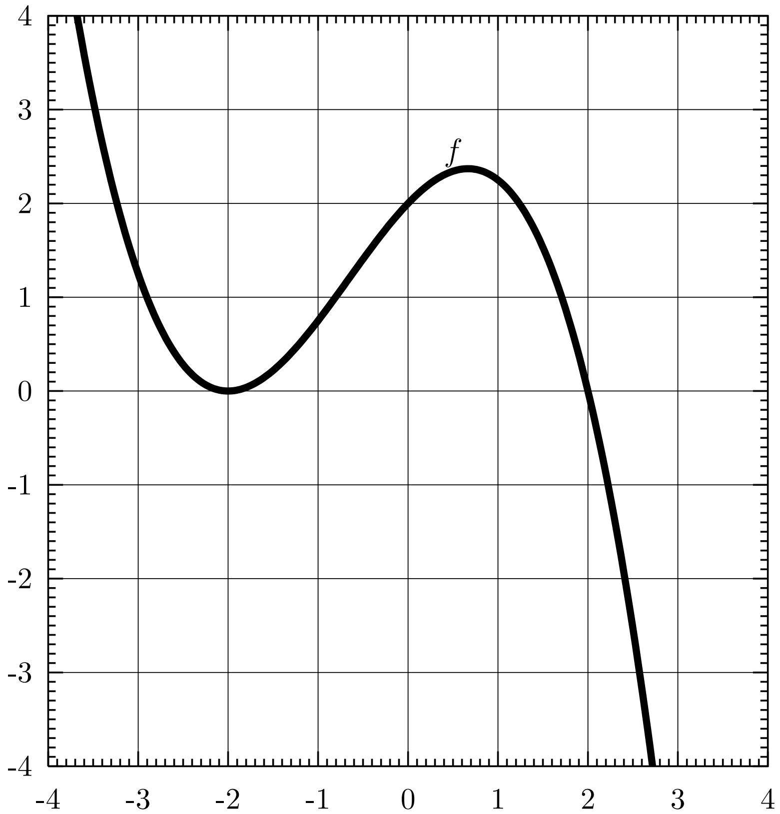
Mathématique Élémentaire

Examen (30 octobre 2000)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 10. Soit $f : [-4,4] \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ dont le graphe est représenté ci-dessous.

- Sur cette même figure esquissez le graphe de la fonction g définie par $g : [-4,4] \circ\!\!\to \mathbb{R} : x \mapsto 1/f(x)$.



- Quel est le domaine de g ?

$\operatorname{Dom} g =$

Question 11. Soit la fonction de classe $\mathcal{C}^1$ donnée par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \theta \mapsto \sin(e^{2\theta} - 1)$.

- Calculez $f(0) =$

- Estimez $f(0{,}01)$ grâce à l'approximation de f par sa tangente.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. On considère la fonction f définie par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.

(a) Calculez $f(1)$;

(b) Montrez par récurrence sur n que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$;

(c) Calculez $\partial_x f(x)$;

(d) Déduisez de (b) et (c) que, pour tout $x \neq 1$,

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} ;$$

(e) Calculez, en fonction de n, $S_n := 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n-1} n$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 12 (suite). Si nécessaire, continuez votre réponse sur cette page.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 13. Soit $\alpha \in [-1, 1]$. On est intéressé à minimiser la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) = -x - 2y$ sous les contraintes

$$\begin{cases} y - \alpha x \geqslant 0 \\ y + 8x \leqslant 52 \\ -2x + y \leqslant 2 \\ x \geqslant 3 \end{cases}$$

(a) Pour $\alpha = 1$, donnez la valeur du minimum ainsi qu'un point en lequel celui-ci est atteint.

(b) Même question que (a) mais pour $\alpha = -1$.

(c) Donnez la valeur du minimum en fonction de $\alpha \in [-1, 1]$.

(d) Appelons $\big(x_{\min}(\alpha), y_{\min}(\alpha)\big)$ un point qui réalise ce minimum. Est-il vrai que $[-1, 1] \multimap \mathbb{R}^2 : \alpha \mapsto \big(x_{\min}(\alpha), y_{\min}(\alpha)\big)$ est une fonction. Justifiez.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 13 (suite). Continuez votre réponse sur cette page.