Mathématique Élémentaire

Examen

(8 janvier 2001)

Nom :

Prénom :

Section :

- Veuillez commencer par écrire en lettres majuscules votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.
- Les *explications sont* aussi *importantes* que les résultats. Rappelez vous que nous ne voyons pas ce que vous pensez, seulement ce que vous avez écrit. Des expressions comme « on voit clairement que » sont donc, ici, à bannir. Par exemple, si vous concluez quelque chose d'un graphique, expliquez comment vous faites — quitte à refaire une esquisse du dessin avec des annotations.
- Ne confondez pas la *rédaction* de vos réponses avec celle de vos brouillons !
- La grandeur des espaces laissés après les questions vous donne une *indication* sur la *longueur des réponses* attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille de la *question précédente* pour finir votre réponse !

Question 1. Donnez toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de $x^3 = 64$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2.

- Écrire sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$ le nombre complexe z_0 dont le module est 4 et l'argument est $\pi/6$;
- Donner l'argument du conjugué de z_0 ;
- Dessinez de façon précise le vecteur déterminé par z_0 (en utilisant le cercle trigonométrique) ;
- Donnez une équation du second degré à coefficients réels dont z_0 est racine ;
- Soit $z_1 = -\dfrac{4}{2\sqrt{3}} - 2\boldsymbol{i}$. Prouver que $z_0 + z_1 \in \mathbb{R}$.

Mathématique Élémentaire

Examen (8 janvier 2001)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3.

- Donnez, en bon français, la négation de la contraposée de la phrase suivante : « Si je possède le syllabus d'analyse, alors je réussirai l'examen (d'analyse) ».
- Donnez la table de vérité de $(A \Leftrightarrow \neg B) \wedge C$.
- Donnez une formule équivalente à $(A \Leftrightarrow \neg B) \wedge C$ n'utilisant que les connecteurs logiques $\wedge$, $\vee$ et $\neg$. Justifiez votre réponse.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4.

- Calculez $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Calculez $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k$.

Question 5. Calculez $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} (in + j)$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \multimap \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos y}}$. Calculez (en explicitant vos calculs) les fonctions et valeurs suivantes :

- $\partial_x f(x, y) =$

- $\partial_y f(x, y) =$

- $\partial_x f(0, 0) =$

- $\partial_y f(0, 0) =$

Question 7. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h(\xi) := \xi^3 + a\xi - 2$.

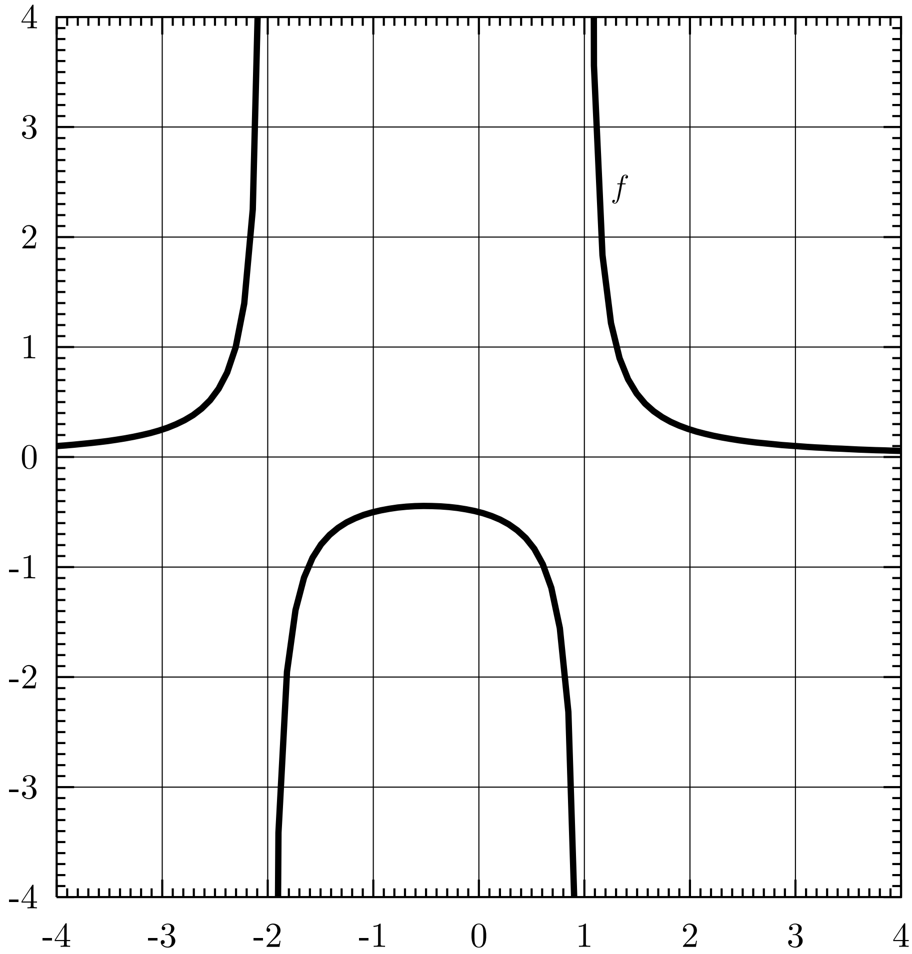
- Donnez l'équation cartésienne de la tangente T au graphe de h en $\xi = 0$.
- Pour quelle valeur de a cette tangente est-elle horizontale ?

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. Considérons la fonction $f : [-4, 4] \multimap \mathbb{R}$ dont le graphe est donné ci-dessous.



- Quel est le domaine, Dom f, de cette fonction. Justifiez votre réponse.

- Tracez, sur la figure ci-dessus, le graphe de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} - 1$. Justifiez.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9. Soit le système

$$\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x + my + z = 2m \\ (m+1)x + my + z = m \end{cases}$$

- Discutez de l'existence de solution(s) (et les calculer quand elle(s) existe(nt)) en fonction de m *uniquement* dans le cas où le déterminant de la matrice des coefficients est nul.
- Interprétez géométriquement les résultats.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9 (suite). Continuez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 10.

- Calculez, si possible, l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Résolvez le système

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y + z = 0 \\ 2y + z = -4 \end{cases}$$

  L'efficacité de la méthode utilisée est importante.

Mathématique Élémentaire

Examen (8 janvier 2001)

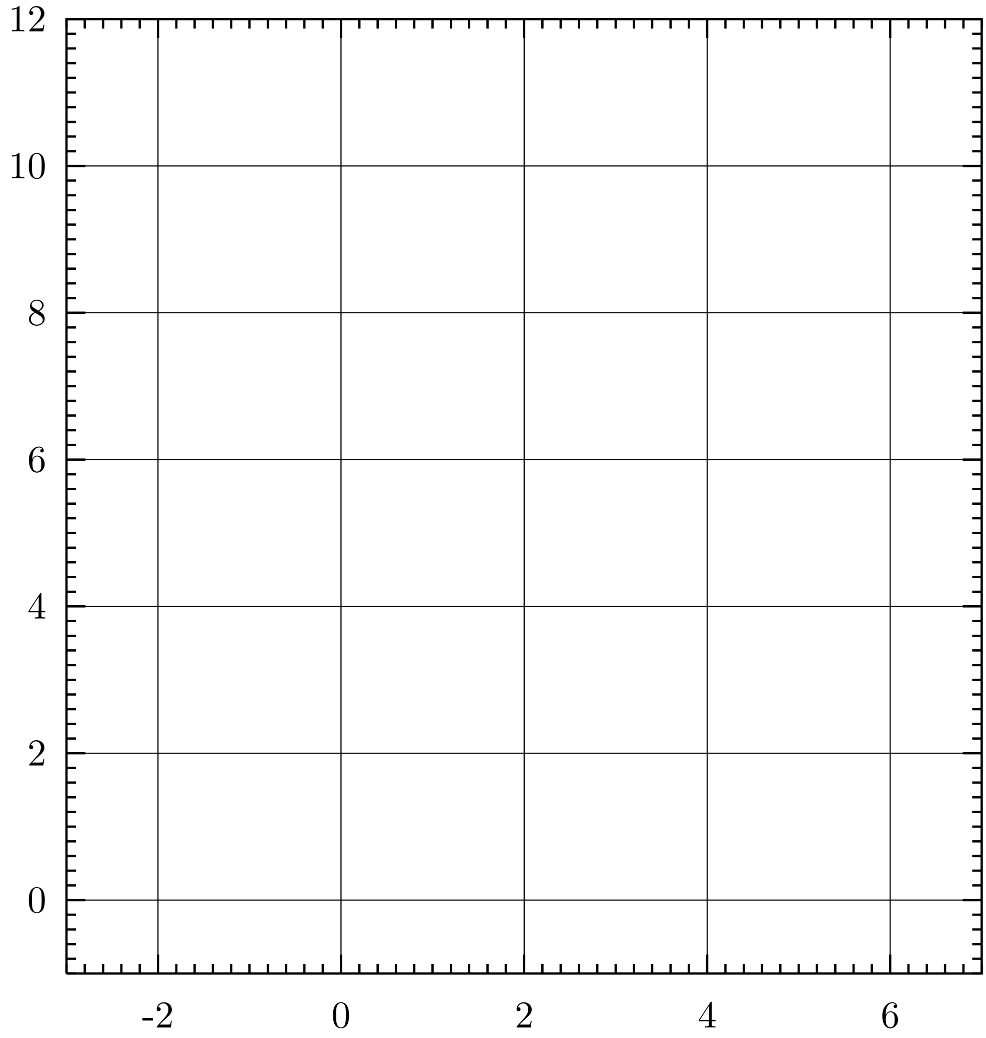
Nom :
Prénom :
Section :

Question 11. Soit $\alpha \in [0,1]$. On est intéressé à

$$\text{maximiser la fonction } f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto f(x,y) = x + \alpha y$$

$$\text{sous les contraintes } \begin{cases} 2x + y \leqslant 11 \\ -x + 2y \leqslant 2 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

- Pour $\alpha = 0$, donnez la valeur du maximum ainsi qu'un point en lequel celui-ci est atteint.
- Même question mais pour $\alpha = 1$.
- Donnez la valeur du maximum en fonction de $\alpha \in [0,1]$ ainsi que *tous les points* qui atteignent ce maximum.
- Appelons $\big(x_{\max}(\alpha), y_{\max}(\alpha)\big)$ un point qui réalise ce maximum. Est-il vrai que $[0,1] \to \mathbb{R}^2 : \alpha \mapsto \big(x_{\max}(\alpha), y_{\max}(\alpha)\big)$ est une fonction ? Justifiez.



Nom :
Prénom :
Section :

Question 11 (suite). Continuez votre réponse sur cette page si nécessaire.