Mathématique Élémentaire

Examen (6 juin 2001)

Nom :
Prénom :
Section :

- Veuillez commencer par écrire en lettres majuscules votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.
- Les *explications sont* aussi *importantes* que les résultats. Rappelez vous que nous ne voyons pas ce que vous pensez, seulement ce que vous avez écrit. Des expressions comme « on voit clairement que » sont donc, ici, à bannir. Par exemple, si vous concluez quelque chose d'un graphique, expliquez comment vous faites — quitte à refaire une esquisse du dessin avec des annotations.
- Ne confondez pas la *rédaction* de vos réponses avec celle de vos brouillons !
- La grandeur des espaces laissés après les questions vous donne une *indication* sur la *longueur des réponses* attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille de la *question précédente* pour finir votre réponse !

Question 1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $x^5 = -1$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Soit le nombre complexe $u = -3 + 3\boldsymbol{i}$.

- Donnez la forme trigonométrique de u.
- Déterminez la forme trigonométrique du nombre complexe z tel que

$$u \cdot z = 6\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + \boldsymbol{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

- Écrivez z sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$.
- Donnez l'argument du conjugué de z.
- Calculez $z\,\overline{z}$.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 3. Niez la phrase « Si je n'ai pas de deuxième session, alors je peux partir en vacances ».

Question 4. Calculez $\sum_{j=3}^{k+2} \pi \cdot j$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. Calculez, si possible, l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 10 \\ \quad -y - z = -15 \\ 2x + y + 2z = -10 \end{cases}$$

L'efficacité de la méthode utilisée est importante.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5 (suite). Continuez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Démontrez, par récurrence sur n, que le déterminant de la matrice $M_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ donnée par

$$M_n := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

vaut $n!$.

Mathématique Élémentaire

Examen (6 juin 2001)

Nom :

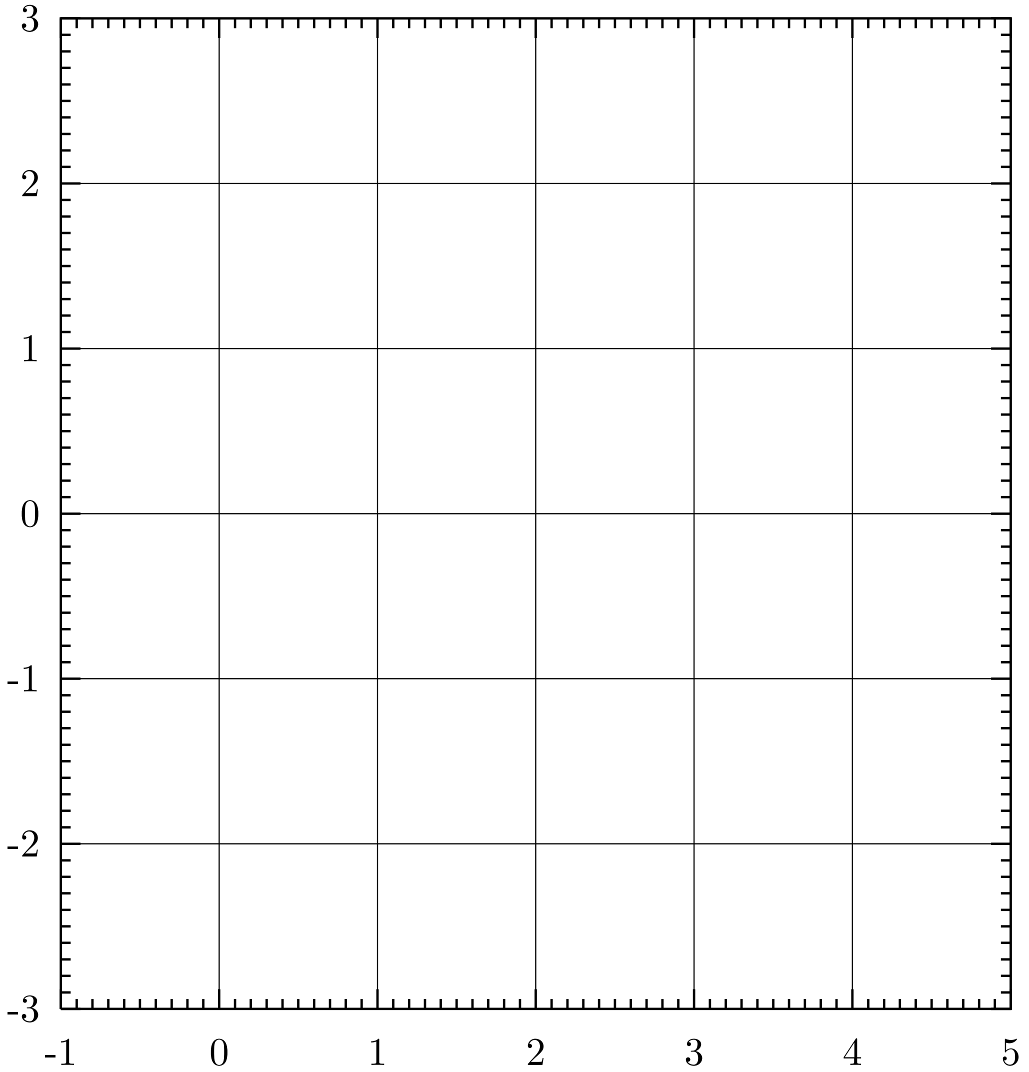
Prénom :

Section :

Question 7. Soient les fonctions

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -2x^2 + 7x - 2 \qquad \text{et} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2|x| - 2.$$

- Tracez ci-dessous les graphes des fonctions f et g.
- Résolvez géométriquement et algébriquement l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.



Mathématique Élémentaire

Examen (6 juin 2001)

Nom :

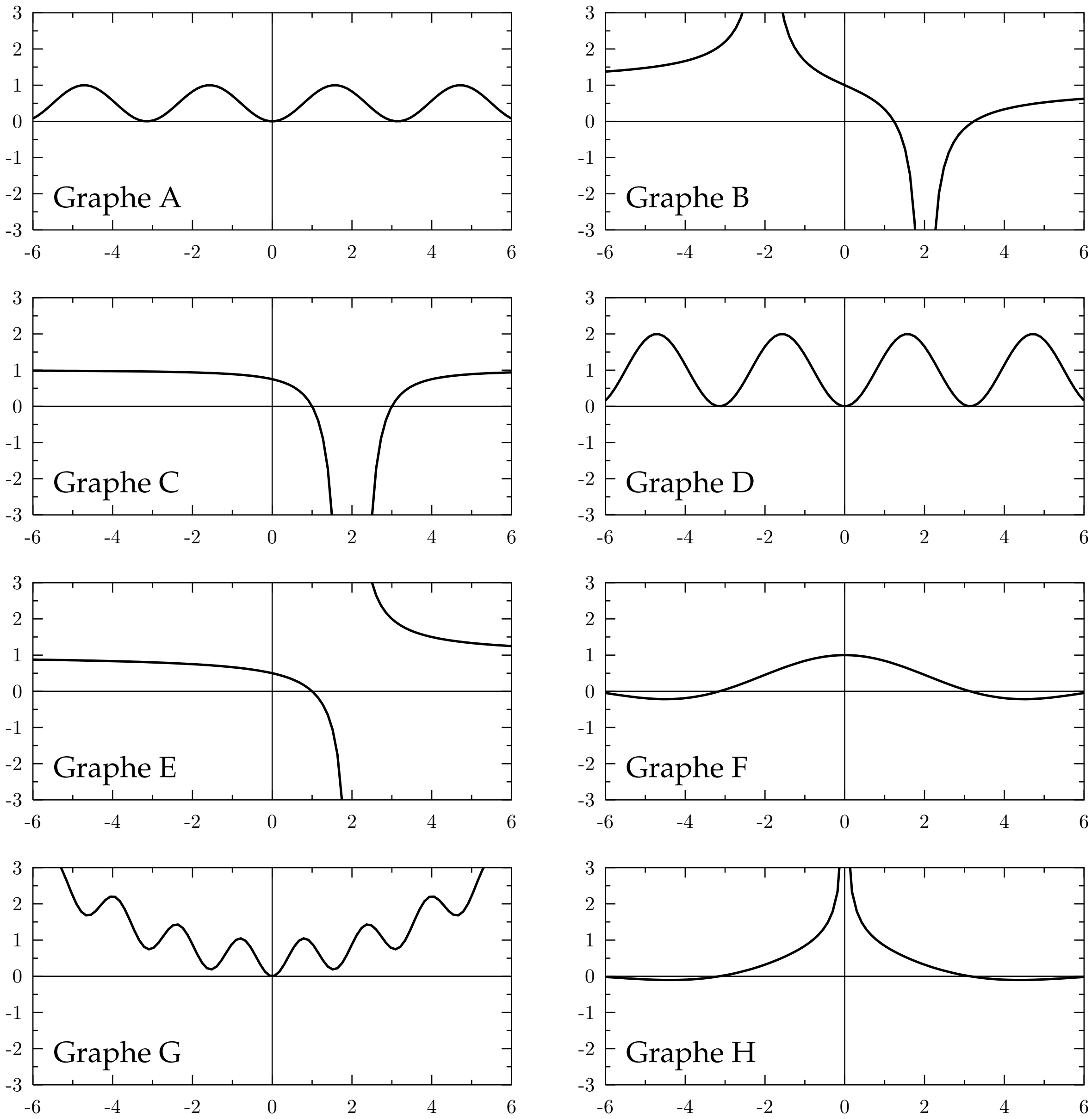
Prénom :

Section :

Question 8. Soient les trois fonctions f, g et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x + 4}, \qquad g(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad \text{et} \qquad h(x) = \sin^2 x.$$

Parmi les graphes ci-dessous, quels sont ceux des fonctions f, g et h. Justifiez vos choix.



Mathématique Élémentaire

Examen (6 juin 2001)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 9. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) = -3x - 2y$. On considère le système de contraintes

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ x + y \leqslant 2 \\ y \geqslant \alpha x \end{cases} \tag{1}$$

où $\alpha \in \,]0, +\infty[$. On est intéressé à minimiser la fonction f sur l'ensemble des (x, y) qui satisfont (1). Pour quelle(s) valeur(s) de α le minimum est-il atteint au point $(1, 1)$?

Nom :
Prénom :
Section :