Mathématique Élémentaire

Examen (16 août 2001)

Nom :
Prénom :
Section :

- Veuillez commencer par écrire en lettres majuscules votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.
- Les *explications sont* aussi *importantes* que les résultats. Rappelez vous que nous ne voyons pas ce que vous pensez, seulement ce que vous avez écrit. Des expressions comme « on voit clairement que » sont donc, ici, à bannir. Par exemple, si vous concluez quelque chose d'un graphique, expliquez comment vous faites — quitte à refaire une esquisse du dessin avec des annotations.
- Ne confondez pas la *rédaction* de vos réponses avec celle de vos brouillons !
- La grandeur des espaces laissés après les questions vous donne une *indication* sur la *longueur des réponses* attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille de la *question précédente* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculez les sommes suivantes :

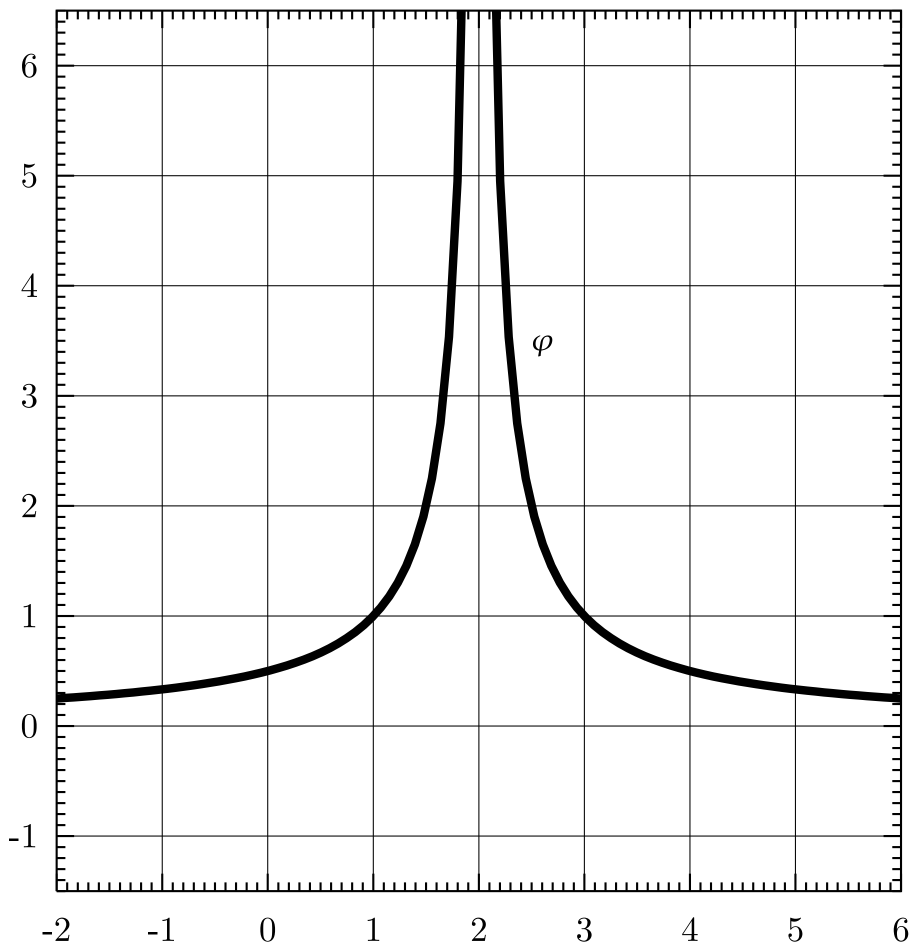
- $\sum_{p=4}^{n+5} \sqrt{3}$
- $\sum_{k=1}^{\ell^2} \sum_{p=1}^{\ell^2+1} (k-p)$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Considérons la fonction $\varphi : [-2,6] \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R}$ dont le graphe est donné ci-dessous.



- Quel est le domaine, Dom φ, de cette fonction. Justifiez votre réponse.

- Tracez, sur la figure ci-dessus, le graphe de la fonction ψ définie par $\psi(x) = \dfrac{1}{\varphi(x)} - 1$. Justifiez.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Soit le nombre complexe $z = -3 + 3\boldsymbol{i}$.

- Donnez la forme trigonométrique de z.
- Déterminez la forme trigonométrique du nombre complexe u tel que

$$u \cdot z = 6\sqrt{2}\Big(\cos\frac{7\pi}{12} + \boldsymbol{i}\sin\frac{7\pi}{12}\Big).$$

- Écrivez u sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$.
- Donnez l'argument du conjugué de u.
- Calculez $u\,\overline{u}$.

Nom :

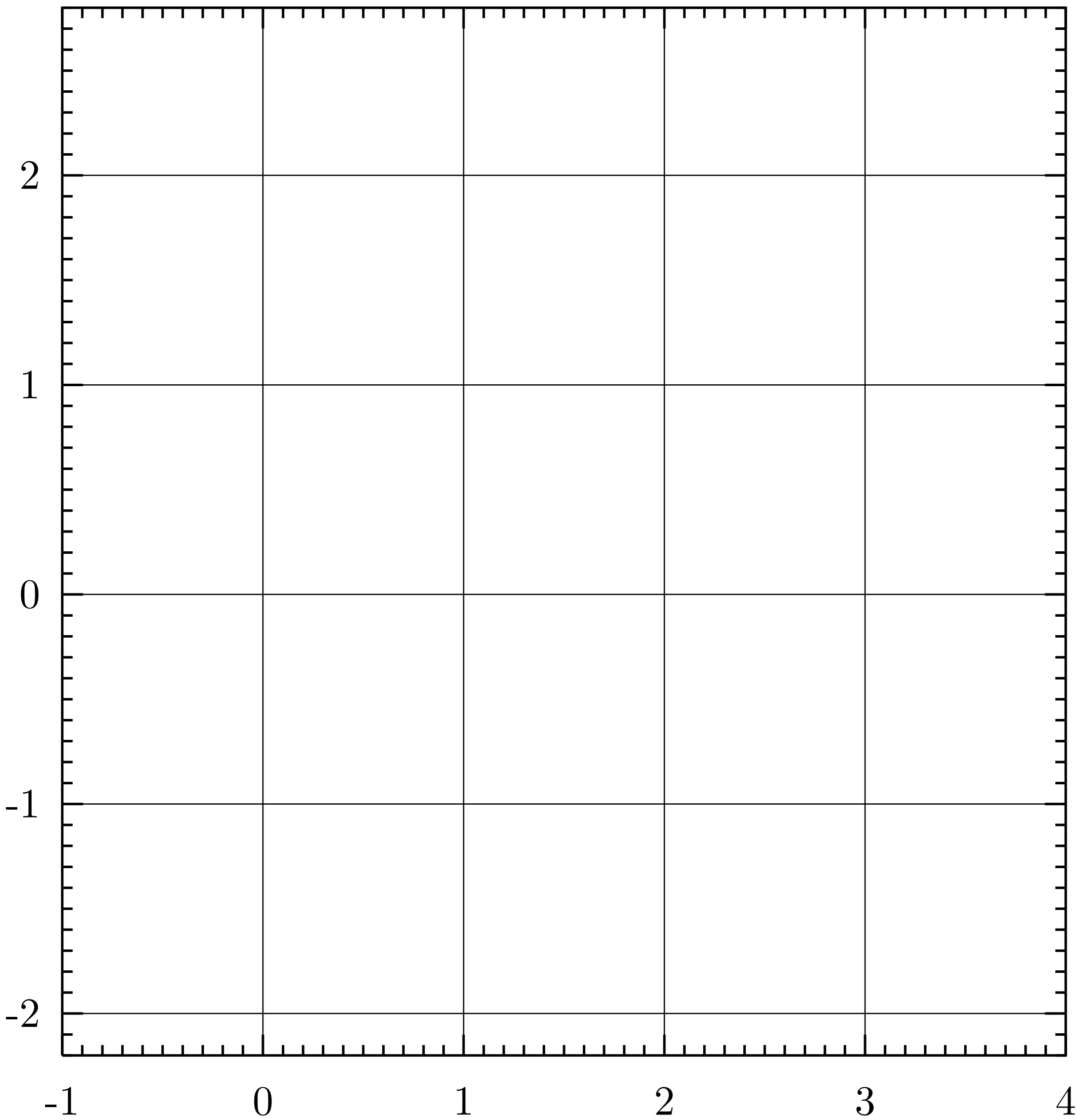
Prénom :

Section :

Question 4. Soient les fonctions

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -2x^2 + 6x - 2 \qquad \text{et} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2|x| - 2.$$

- Tracez ci-dessous les graphes des fonctions f et g.
- Résolvez géométriquement et algébriquement l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.



Nom :
Prénom :
Section :

Question 4 (suite). Continuez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 5.

(a) Donnez la table de vérité de $(T \implies U) \implies V$.

(b) Donnez une formule équivalente à $(T \implies U) \implies V$ n'utilisant que les connecteurs logiques $\wedge$, $\vee$ et $\neg$. Justifiez votre réponse.

(c) Niez la phrase : « Si je ne réussis pas Math. Élem. alors je ne pourrai passer en deuxième. »

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $x^4 + 1 = 0$.

Question 7. Soient $a \in \mathbb{R}_0$ et $n \in \mathbb{N}_0$. Prouvez par récurrence que

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8.

- Calculez, si possible, l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Résolvez le système

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y + z = 0 \\ 2y + z = -4 \end{cases}$$

L'efficacité de la méthode utilisée est importante.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8 (suite). Continuez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Soient les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : (s,t) \mapsto \mathrm{e}^{st} + \cos^2 t$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \tau \mapsto \tau^3$. Calculez les expressions suivantes en donnant les détails qui permettent de suivre votre démarche.

- $\partial_s f(s,t) =$

- $\partial_s f(0,1) =$

- $\partial_s f\big(h(\sigma),\sigma\big) =$

- $\partial_s\big(h(f(s,t))\big) =$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) = -3x - 2y$. On considère le système de contraintes

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ x + y \leqslant 2 \\ y \geqslant \gamma x \end{cases} \tag{1}$$

où $\gamma \in]0, +\infty[$. On est intéressé à minimiser la fonction f sur l'ensemble des (x, y) qui satisfont (1). Pour quelle(s) valeur(s) de γ le minimum est-il atteint au point $(1, 1)$?

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10 (suite). Continuez votre réponse sur cette page si nécessaire.