Question 1. *Les équations suivantes ont-elles une (des) solution(s) dans $\mathbb{R}$? Si oui calculer ces solutions.*

(1) $2x^2 - 12x + 18 = 0$

(2) $3x^2 + 1 + 6x = 0$

(3) $y^4 + 14y^2 + 33 = 0$

L'équation (1) revient à $2(x^2 - 6x + 9) = 0$, ce qui s'écrit $2(x - 3)^2 = 0$. Il y a une seule solution $x = 3$.

(2) s'écrit $3x^2 + 6x + 1 = 0$, $\Delta = 36 - 12 = 24$; il y a donc deux solutions $x_1 = -3 - \sqrt{6}$ et $x_2 = -3 + \sqrt{6}$.

(3) On pose $x = y^2$. L'équation devient $x^2 + 14x + 33 = 0$. Puisque $\Delta = 14^2 - 4 \cdot 33 = 64$, il y a deux solutions $x_1 = -11$ et $x_2 = -3$. Vu que $y^2 = -11$ et $y^2 = -3$ n'ont pas de solutions dans $\mathbb{R}$, l'équation (3) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Question 2. *Résoudre les équations suivantes dans* $\mathbb{C}$ *:*

(1) $2z^2 - 12z + 18 = 0$ *;*

(2) $z^2 = -81$*.*

(1) est la même équation que l'équation (1) de la question 1 avec $x = z$, donc il y a une seule solution $z = 3$ (on a une solution réelle double ce qui ne laisse pas place à d'autres solutions).

(2) a pour solutions $z_1 = 9\mathbf{i}$ et $z_2 = -9\mathbf{i}$.

Question 3. *Calculer dans $\mathbb{C}$ (et détailler votre calcul) :*

$$\frac{6-2\mathbf{i}}{3}+\left(1+\frac{1}{2}\mathbf{i}^{5}\right)^{2}$$

(1) $\mathbf{i}^4 = 1$ car $\mathbf{i}^2 = -1$ et $\mathbf{i}^4 = (\mathbf{i}^2)^2 = (-1)^2$. Donc $\mathbf{i}^5 = \mathbf{i}^4 \cdot \mathbf{i} = 1 \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i}$.

(2) $(1+\frac{\mathbf{i}}{2})^2 = 1 + \frac{\mathbf{i}^2}{4} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{\mathbf{i}}{2} = \frac{3}{4} + \mathbf{i}$.

(3) $\frac{6-2\mathbf{i}}{3}+\left(1+\frac{1}{2}\mathbf{i}^{5}\right)^{2} = \frac{6}{3} - \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{3}{4} + \mathbf{i} = \frac{11}{4} + \frac{\mathbf{i}}{3}$

Question 4. *Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{C}$ et vérifier votre solution :*

$$x^2 - 2x + 4 = 0.$$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 4 = -12$. Les deux solutions sont donc :

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{12} \cdot \mathbf{i}}{2} = 1 - \sqrt{3}\mathbf{i} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2 + \sqrt{12} \cdot \mathbf{i}}{2} = 1 + \sqrt{3}\mathbf{i}$$

Question 5. *Prenez une solution de l'équation du problème 4 et calculez son conjugué. Que constatez-vous ?*

$1 - \sqrt{3}\mathbf{i}$ est une solution. Son conjugué est $1 + \sqrt{3}\mathbf{i}$ car $1 - (-\sqrt{3})\mathbf{i} = 1 + \sqrt{3}\mathbf{i}$. Si je prends $1 + \sqrt{3}\mathbf{i}$, son conjugué est $1 - \sqrt{3}\mathbf{i}$.

Conclusion : le conjugué d'une solution de l'équation (de la question 4) est encore une solution de la même équation.

Question 6.

(1) Calculer le conjugué de $c\mathbf{i} + d$*.*

(2) Calculer le module de $1 - \sqrt{5}\mathbf{i}$*.*

(3) Calculer le produit de $1 - \sqrt{5}\mathbf{i}$ *par son conjugué.*

$c\mathbf{i} + d$ a pour conjugué $d - c\mathbf{i}$.

$|1 - \sqrt{5}\mathbf{i}\,| = \sqrt{1+5} = \sqrt{6}.$

$(1 - \sqrt{5}\mathbf{i}\,)(1 + \sqrt{5}\mathbf{i}\,) = 1^2 - (\sqrt{5}\mathbf{i}\,)^2 = 1 + 5 = 6.$