Question 1.

- *Calculez* $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\mathbf{i}}{2}\right)^2$ *et* $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\mathbf{i}}{2}\right)^3$.

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}\mathbf{i}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\Big(1^2 + 2\cdot 1\cdot\sqrt{3}\mathbf{i} + (\sqrt{3}\mathbf{i})^2\Big) = \frac{-1+\sqrt{3}\mathbf{i}}{2}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\sqrt{3}\mathbf{i}}{2}\right)^3 &= \left(\frac{1+\sqrt{3}\mathbf{i}}{2}\right)^2\left(\frac{1+\sqrt{3}\mathbf{i}}{2}\right) = \frac{1}{4}\Big(-1^2 + (\sqrt{3}\mathbf{i})^2\Big)\\ &= \frac{1}{4}(-1-3) = -1\end{aligned}$$

Question 1 (suite).

- *Donnez une formule (et prouvez la) pour* $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\mathbf{i}}{2}\right)^n$ *avec* $n \in \mathbb{N}$*.*
- *Calculez le module de* $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\mathbf{i}}{2}\right)^n$*.*

- Appelons $z := (1+\sqrt{3}\mathbf{i})/2$. On vient de montrer que $z^3 = -1$. Donc $z^4 = z^3 z = -z$, $z^5 = z^3 z^2 = -z^2$ et $z^6 = (z^3)^2 = 1$, $z^7 = z^6 z = z$,... Comme $z^6 = 1$, la séquence z^n est périodique. Plus précisément, si $m := n \bmod 6 \in \{0,1,\ldots,5\}$, on écrit* $n = 6k+m$ et dès lors $z^n = z^{6k+m} = (z^6)^k \, z^m = 1^k \, z^m = z^{n \bmod 6}$. Un argument similaire prouve mieux :

  $z^n = (-1)^{n \operatorname{div} 3} \, z^{n \bmod 3}$ (« div » dénote la division entière).

*En d'autres mots, m est le reste de la division de n par 6.

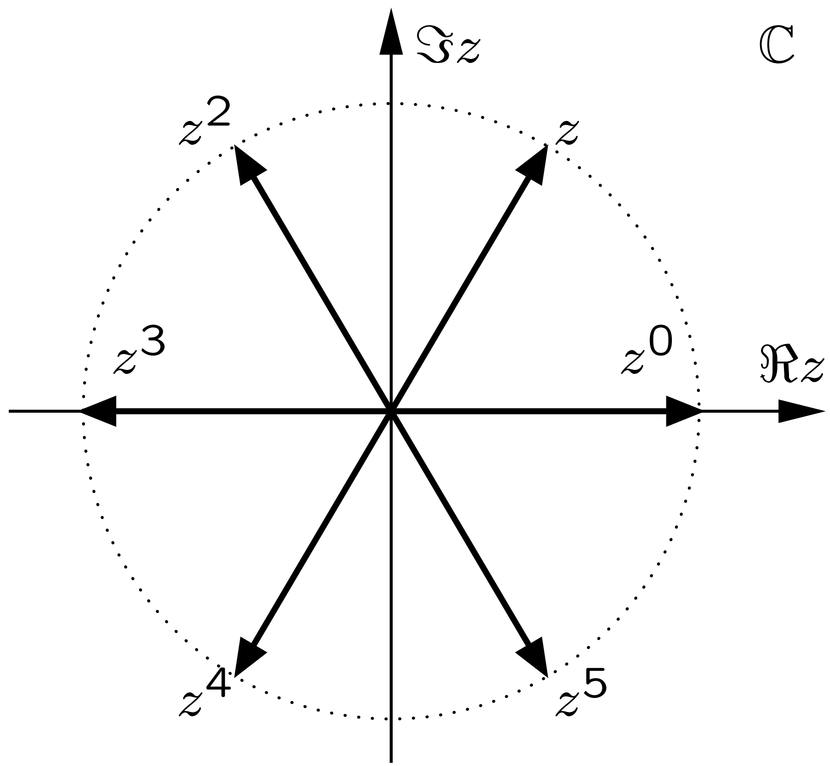
- Puisque le module d'un produit vaut le produit des modules, on en déduit :

$$\left|\left(\frac{1+\sqrt{3}\mathbf{i}}{2}\right)^n\right| = \left|\frac{1+\sqrt{3}\mathbf{i}}{2}\right|^n = 1^n = 1$$

Question 1 (suite).

- *Représentez graphiquement les nombres* $\left(\frac{1+\sqrt{3}\mathbf{i}}{2}\right)^n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$*.*

Étant donné que $z^n = z^{n \bmod 6}$ (voir la deuxième partie de la question), il suffit de représenter $z^0, z, z^2, \ldots, z^5$. C'est assez facile puisque $z^0 = 1$, $z^3 = -1$, $z^4 = -z$, $z^5 = -z^2$ et que de plus $|z^n| = 1$, c'est-à-dire que tous les points se trouvent sur le cercle unité. L'angle entre z^n et z^{n+1} est de 60° (càd. $\pi/3$ radians).



Question 2. *Prouvez que, pour tout* $u, v \in \mathbb{C}$ *:* $\overline{u^3 + v^3} = \overline{u}^3 + \overline{v}^3$*. (Écrire la preuve avec des « enchaînements logiques » rédigés en français.)*

Tout d'abord, prouvons que $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$. En effet, en notant $z_1 =: a_1 + b_1\mathbf{i}$ et $z_2 =: a_2 + b_2\mathbf{i}$, on trouve

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a_1 + b_1\mathbf{i}) + (a_2 + b_2\mathbf{i})} = \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathbf{i}} \\ &= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)\mathbf{i} = (a_1 - b_1\mathbf{i}) + (a_2 - b_2\mathbf{i}) = \overline{z_1} + \overline{z_2}\end{aligned}$$

On en déduit que $\overline{u^3 + v^3} = \overline{u^3} + \overline{v^3}$. De la même manière, on montre que $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$. En effet, avec le notations ci-dessus

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a_1 + b_1\mathbf{i})(a_2 + b_2\mathbf{i})} = \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\mathbf{i}} \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + b_1a_2)\mathbf{i} = (a_1 - b_1\mathbf{i})(a_2 - b_2\mathbf{i}) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\end{aligned}$$

En conséquence $\overline{u^3} = \overline{uuu} = \overline{u} \cdot \overline{u} \cdot \overline{u} = \overline{u}^3$ et $\overline{v^3} = \overline{v}^3$ ce qui conclut la preuve.

Question 3. *Soient le point $p = (1, 2, -3)$, la droite $D \equiv x - 1 = y/2 - 1 = (-1 - z)/3$, et le plan $\alpha \equiv y + z = 3$. Écrire une équation cartésienne du plan π contenant p, parallèle à D et perpendiculaire à α.*

Pour déterminer π, on va en chercher deux vecteurs directeurs. Comme π doit être perpendiculaire à α, un de ces vecteurs directeurs doit donc être le gradient (la normale) de α : $(0, 1, 1)$. D'autre part, π parallèle à D dit qu'un vecteur directeur de D est aussi un vecteur directeur de α. Or un tel vecteur directeur se voit sur l'équation de la droite telle qu'elle est écrite : $x/\mathbf{1} - 1 = y/\mathbf{2} - 1 = z/(\mathbf{-3}) - 1/3$. Il vaut $(1, 2, -3)$. Une équation paramétrique de D est donc

$$\pi \equiv (x, y, z) = (1, 2, -3) + \lambda(0, 1, 1) + \mu(1, 2, -3), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On obtient trois équations. En éliminant λ et μ, on trouve l'équation cartésienne du plan π : $\pi \equiv 5x - y + z = 0$.

Remarque : Il est possible de tester sa réponse en regardant si $p \in \pi$ et si on a $q \in \alpha \Rightarrow q + \nabla\pi \in \alpha$.

Solution alternative

On sait que l'équation de π est de la forme $ax + by + cz = d$ où le vecteur $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ est normal au plan. Exprimer que $p \in \pi$ revient à remplacer x par 1, y par 2 et z par -3 dans l'éq. de π. On obtient : $a + 2b - 3c = d$ $\mathbf{(1)}$.

D'autre part, « π parallèle à D » dit qu'un vecteur directeur de D est perpendiculaire à $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$. Or un tel vecteur $\overrightarrow{v}'$ se voit sur l'équation de D : $(x-1)/\mathbf{1} = (y-2)/\mathbf{2} = (z+1)/{-\mathbf{3}}$. On a $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{v}' \iff \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}' = 0 \iff a + 2b - 3c = 0$ $\mathbf{(2)}$. En comparant (1) et (2), on déduit que $d = 0$.

Enfin, « π perpendiculaire à α » dit que les vecteurs normaux respectifs à ces deux plans sont perpendiculaires. Or un vecteur normal $\overrightarrow{v}''$ à α se lit sur son équation : $\mathbf{0}x + \mathbf{1}y + \mathbf{1}z = 3$. On a $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{v}'' \iff \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}'' = 0 \iff b + c = 0$ $\mathbf{(3)}$. De (3) on déduit que $b = -c$. Pour obtenir les valeurs de a, b, c, on donne une valeur arbitraire (différente de 0) à c, par exemple $c = 1$. Dès lors, $b = -1$ et $a = +2 + 3 = 5$. Donc $\pi \equiv 5x - y + z = 0$.

Question 4. *Calculer les produits suivants :*

(1) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $\mathbf{i} \begin{pmatrix} 2+\mathbf{i} & -\mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & \mathbf{i}-4 \end{pmatrix}$

(1) est le produit d'une matrice 3×1 avec une matrice 1×3. La matrice résultat est donc du type 3×3.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)\cdot(-5) & -2\cdot 6 & -2\cdot 4 \\ 1\cdot(-5) & 1\cdot 6 & 1\cdot 4 \\ 3\cdot(-5) & 3\cdot 6 & 3\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -12 & -8 \\ -5 & 6 & 4 \\ -15 & 18 & 12 \end{pmatrix}$$

Pour (2), c'est juste le produit d'une matrice par un scalaire. On a :

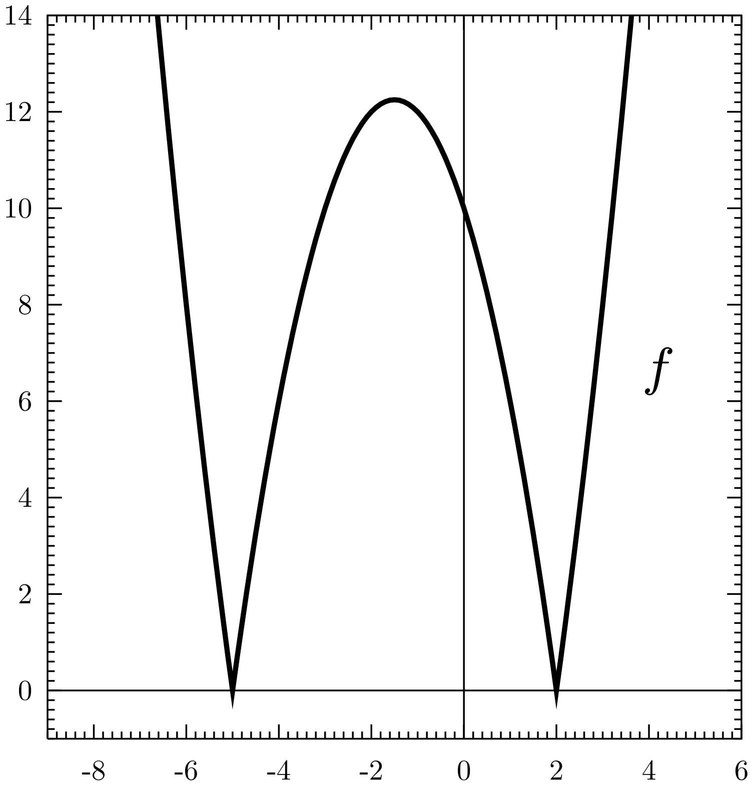
$$\mathbf{i} \begin{pmatrix} 2+\mathbf{i} & -\mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & \mathbf{i}-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathbf{i}-1 & 1 \\ 1 & -1-4\mathbf{i} \end{pmatrix}$$

Question 5. *Résolvez les inéquations suivantes de manière graphique* et *algébrique.*

- $|-x^2 - 3x + 10| \leqslant 0$

Puisque $|\cdot| \geqslant 0$, l'inéquation revient à $|-x^2 - 3x + 10| = 0$ ou encore $-x^2 - 3x + 10 = 0$. Les racines sont $(3 \pm \sqrt{9+40})/(-2)$, soit 2 et -5.

Graphiquement, on définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) := |-x^2 - 3x + 10|$. Le graphe de f n'est en dessous de l'axe des x qu'aux racines du polynôme.



Question 5 (suite).

- $|x^2 - 1| \leqslant |x| + 1$

$$|x^2-1| \leqslant |x|+1 \quad \Longleftrightarrow \quad -|x|-1 \leqslant x^2-1 \ \text{ et } \ x^2-1 \leqslant |x|+1.$$

La première expression du « et » est toujours vraie puisque $-|x| \leqslant 0 \leqslant x^2$. Reste donc la seconde. Elle est équivalente à

$$\begin{aligned} x^2-2 \leqslant |x| \quad &\Longleftrightarrow \quad x \leqslant -x^2+2 \ \text{ ou } \ x^2-2 \leqslant x \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2+x-2 \leqslant 0 \ \text{ ou } \ x^2-x-2 \leqslant 0 \end{aligned}$$

Les deux polynômes sont « ouverts vers le haut » ; ainsi les solutions de chacune des inéquations consistent en les points entre les racines (ou $\varnothing$ si celles-ci n'existent pas). Les racines de la première sont -2 et 1, d'où $x^2+x-2 \leqslant 0 \iff x \in [-2,1]$. De même $x^2-x-2 \leqslant 0 \iff x \in [-1,2]$. Vu qu'on a un « ou », la solution est l'union des deux intervalles :

$$|x^2-1| \leqslant |x|+1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [-2,1] \cup [-1,2] = [-2,2]$$

Si on remarque que l'inéquation est invariante sous la transformation $x \mapsto -x$, on voit que la solution doit aussi l'être (càd être symétrique par rapport à 0).

Question 5 (suite).

- $|x^2 - 1| \leqslant |x| + 1$

On définit les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) := |x^2 - 1|$$
$$g(x) := |x| + 1$$

L'inéquation s'écrit

$$f(x) \leqslant g(x)$$

et il est clair sur le dessin que c'est le cas si et seulement si $x \in [-2, 2]$.