Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (9 octobre 2000)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 1. Calculez en explicitant vos calculs :

- $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n}(\ell+1) =$

- $\displaystyle\sum_{m=3}^{t} 2 =$

Question 2. Justifiez vos réponses.

- $\boldsymbol{i}+1$ est-il racine de $3x^2 - 4\boldsymbol{i}x + 2\boldsymbol{i} - 4 = 0$?

- Si l'argument de z est θ, l'argument de $\boldsymbol{i}z$ est-il $\theta + 3\pi/4$?

- Est-il vrai que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $\arg(z^{-1}) = -\arg(z)$?

Question 3. Mettre sous forme trigonométrique $\sqrt{2} + \sqrt{6}\,\boldsymbol{i}$ (calculez explicitement l'argument).

Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (9 octobre 2000)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4.

- Calculez les racines carrées de $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$; mettez les sous la forme $a + b\boldsymbol{i}$. *Justifiez vos calculs.*
- Représentez les solutions graphiquement.

Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (9 octobre 2000)

Nom :

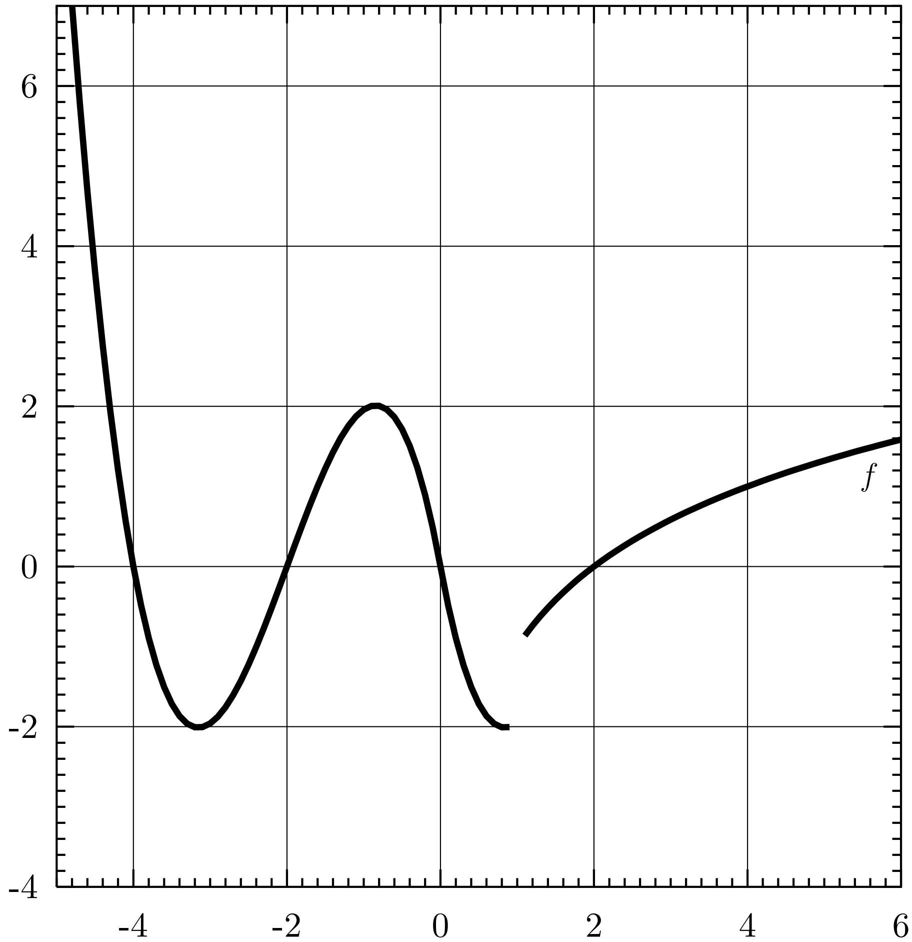
Prénom :

Section :

Question 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dont le graphe est donné ci-dessous. Dessinez sur cette même figure, les graphes des fonctions g et h définies respectivement par

$$g(x) := \big|f(x-1)\big| \quad \text{et} \quad h(x) := f(x) + 4$$

Écrivez explicitement (sous forme d'une union d'intervalles disjoints) l'ensemble des x tels que $f(x) \leqslant 0$.



Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (9 octobre 2000)

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6. Complétez :

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si } \dots\dots\dots \\ -x-1 & \text{si } \dots\dots\dots \end{cases}$$

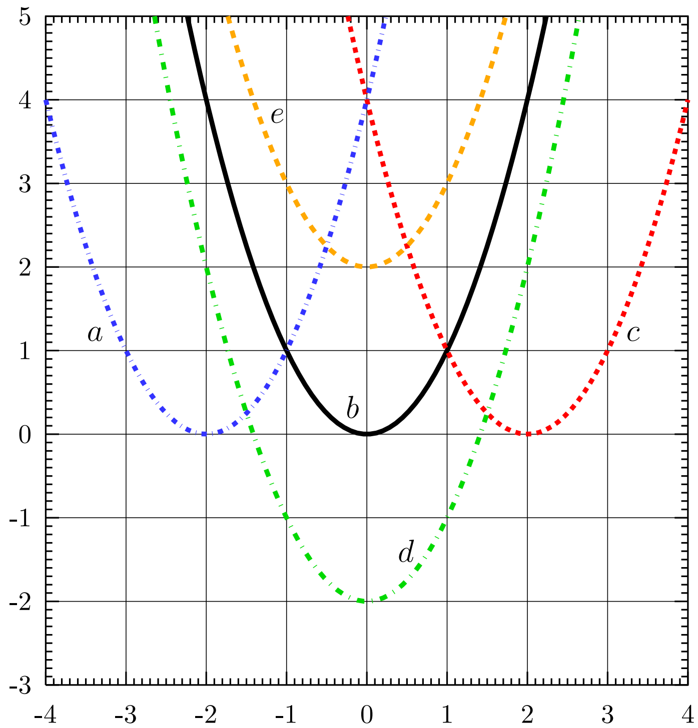
Question 7. Cochez la ou les bonnes réponses :

$\cos(\alpha+\beta) =$
- ☐ $\cos\alpha + \cos\beta$
- ☐ $\cos\alpha \cdot \cos\beta$
- ☐ $\cos^2\alpha - \sin^2\beta$
- ☐ $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- ☐ $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

Pour tout nombre complexe z :

$|z| =$
- ☐ $\sqrt{z^2}$
- ☐ $z\bar{z}$
- ☐ $\sqrt{z\bar{z}}$
- ☐ $\cos\big(\arg(z)\big)$

Question 8. Identifiez les graphes de $f(x) := x^2+2$ et $g(x) := (x+2)^2$ sur la figure suivante.



fonction	graphe
f	
g	

Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (9 octobre 2000)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9. Cochez toutes les propositions qui sont vraies parmi les suivantes :

- ☐ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| > 0$;
- ☐ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geqslant 0$;
- ☐ Il existe un $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 0$;
- ☐ Il existe un $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leqslant 0$.

Question 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On veut déterminer l'ensemble des x tels que $f(x) \leqslant 0$. On sait que

$$\begin{aligned}
&\text{si } x > 0, \quad f(x) \leqslant 0 \iff x \leqslant 5 \\
&\text{si } x \leqslant 0, \quad f(x) \leqslant 0 \iff x \leqslant -2
\end{aligned}$$

Quelle est la solution (exprimée comme une union d'intervalles) de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$?

Question 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Supposons qu'on sache que

$$f(x) \leqslant 0 \iff 2 \leqslant x \leqslant 3.$$

Quelle est la solution (exprimée comme une union d'intervalles) de l'inéquation $f(x+1) \leqslant 0$?

Mathématique Élémentaire

Test n° 4 (9 octobre 2000)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 12. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculez $A \cdot B$ et déduisez en la matrice B^{-1}. *Justifiez votre démarche.*

Nom :

Prénom :

Section :

Question 13. Discutez l'existence de solution(s) (et les calculer quand elle(s) existe(nt)) en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ pour le système

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ ax + by = b \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$