Question 1. *Calculez en explicitant vos calculs :*

- $\sum_{\ell=0}^{n} (\ell + 1) =$
- $\sum_{m=3}^{t} 2 =$

$$\sum_{\ell=0}^{n} (\ell + 1) = \sum_{\ell=0}^{n} \ell + \sum_{\ell=0}^{n} 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{m=3}^{t} 2 = \underbrace{2 + \cdots + 2}_{t-2 \text{ termes}} = 2(t-2) = 2t - 4$$

Question 2. *Justifiez vos réponses.*

(1) $\mathbf{i}+1$ *est-il racine de* $3x^2-4\mathbf{i}x+2\mathbf{i}-4=0$ *?*

(2) Si l'argument de z *est* θ*, l'argument de* $\mathbf{i}z$ *est-il* $\theta+3\pi/4$ *?*

(3) Est-il vrai que pour tout $z\in\mathbb{C}$*,* $z\neq 0$*,* $\arg(z^{-1})=-\arg(z)$ *?*

(1) Pour le vérifier, il suffit de remplacer x par $\mathbf{i}+1$ dans l'expression $3x^2-4\mathbf{i}x+2\mathbf{i}-4$ et de voir si le résultat est nul. On a $3(\mathbf{i}+1)^2-4\mathbf{i}(\mathbf{i}+1)+2\mathbf{i}-4=3(-1+2\mathbf{i}+1)+4-4\mathbf{i}+2\mathbf{i}-4=4\mathbf{i}$ et donc la réponse est « non ».

(2) Non. En effet, on a que $\arg(\mathbf{i}z)=\arg(\mathbf{i})+\arg(z)=\pi/2+\theta$ ce qui n'est pas égal à $\theta+3\pi/4$ (même modulo 2π).

(3) Oui. En effet, $z\cdot z^{-1}=1$, d'où $\arg(z)+\arg(z^{-1})=0$. Une autre manière de le voir : si $z=\rho(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)$, on a, en multipliant par le conjugué, que $1/z=(1/\rho)(\cos\theta-\mathbf{i}\sin\theta)=(1/\rho)\Big(\cos(-\theta)+\mathbf{i}\sin(-\theta)\Big)$.

Question 3. *Mettre sous forme trigonométrique* $\sqrt{2}+\sqrt{6}\mathbf{i}$ *(calculez explicitement l'argument).*

Si $\sqrt{2}+\sqrt{6}\mathbf{i} = \rho(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)$, on a que

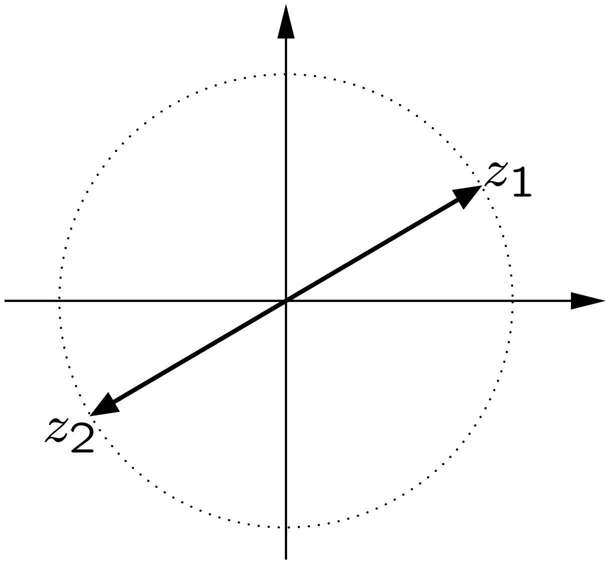
$$\rho = \sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$\theta = \mathrm{arctg}(\sqrt{6}/\sqrt{2}) = \mathrm{arctg}(\sqrt{3}) = \pi/3$$

(rappelons que $\cos(\pi/3) = 1/2$ et $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$).

Question 4.

- *Calculez les racines carrées de* $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$ *; mettez les sous la forme* $a+b\mathbf{i}$.
- *Représentez les solutions graphiquement.*

On calcule comme pour la question précédente que $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} = \rho(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)$ avec $\rho = 1$ et $\theta = \pi/3$. Dès lors les deux racines de $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$ sont $z_1 = \sqrt{\rho}(\cos(\theta/2) + \mathbf{i}\sin(\theta/2)) = \cos(\pi/6) + \mathbf{i}\sin(\pi/6)$ et $z_2 = -z_1$. Puisque $\cos(\pi/6) = \cos(\pi/2 - \pi/3) = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ et $\sin(\pi/6) = 1/2$, on trouve

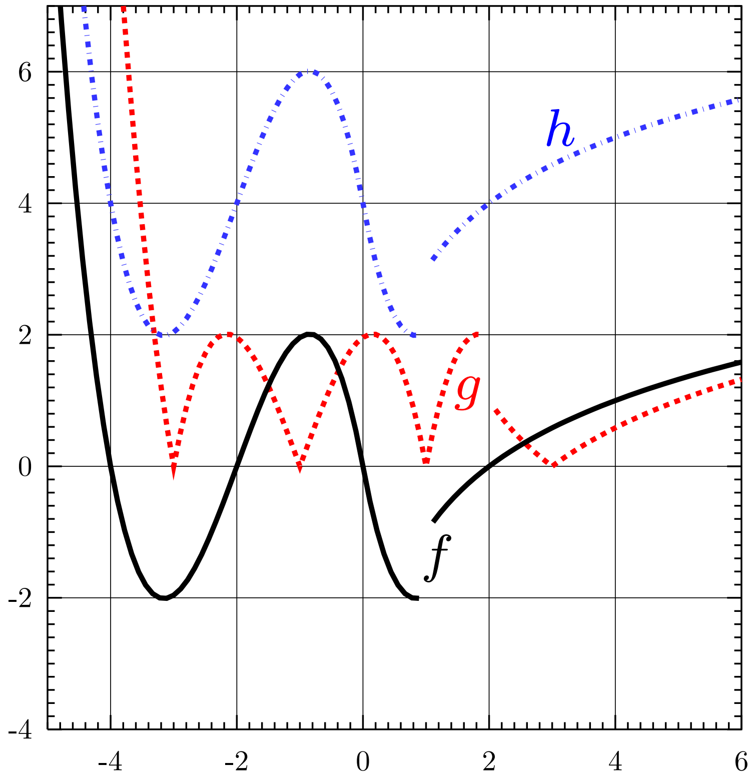


$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i} \qquad \text{et} \qquad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{i}.$$

Question 5. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dont le graphe est donné ci-dessous. Dessinez sur cette même figure, les graphes des fonctions g et h définies respectivement par*

$$g(x) := |f(x-1)| \quad \text{et}$$
$$h(x) := f(x) + 4$$

Écrivez explicitement (sous forme d'une union d'intervalles) l'ensemble des x tels que $f(x) \leqslant 0$.



L'ensemble demandé est

$$[-4, -2] \cup [0, 2].$$

Question 6. *Complétez :*

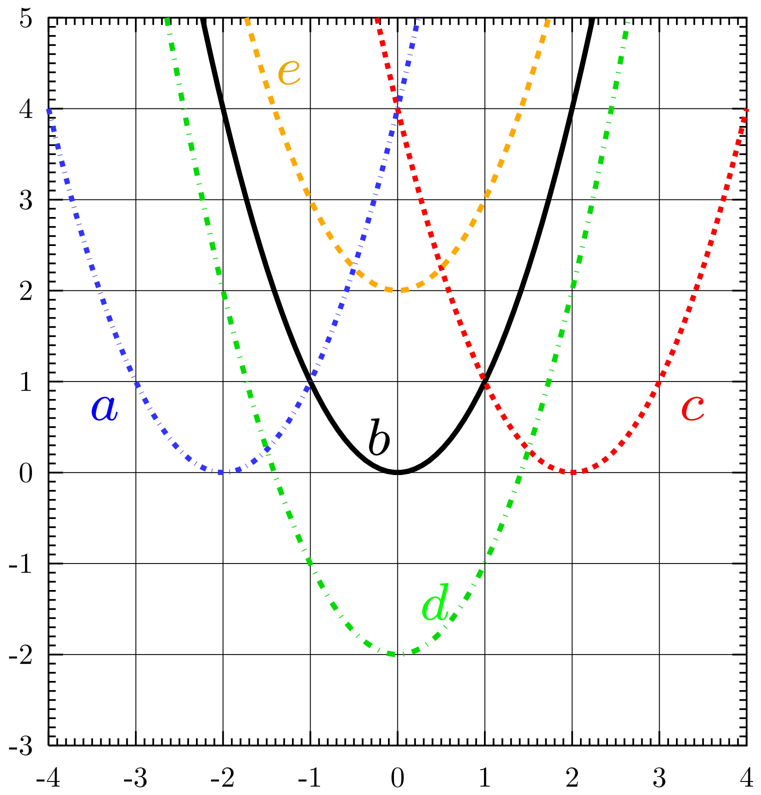
$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \textit{si } \mathbf{x+1 \geqslant 0} \\ -x-1 & \textit{si } \mathbf{x+1 \leqslant 0} \end{cases}$$

Question 7. *Cochez la ou les bonnes réponses :*

$\cos(\alpha+\beta) =$
- ☐ $\cos\alpha + \cos\beta$
- ☐ $\cos\alpha \cdot \cos\beta$
- ☐ $\cos^2\alpha - \sin^2\beta$
- ☑ $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- ☐ $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$|z| =$
- ☐ $\sqrt{z^2}$
- ☐ $z\overline{z}$
- ☑ $\sqrt{z\overline{z}}$
- ☐ $\cos\big(\arg(z)\big)$

Question 8. *Identifiez les graphes de* $f(x) := x^2+2$ *et* $g(x) := (x+2)^2$ *sur la figure suivante.*



fonction	graphe
f	e
g	a

Le graphe de $h(x) := x^2$ est b. Vu que $f = h+2$, le graphe de f est une translation verticale de b de 2 unités (vers le haut). D'autre part, $g(x) = h(x+2)$ et donc le graphe de g est une translation horizontale de b de -2 unités.

Question 9. *Cochez toutes les propositions qui sont vraies parmi les suivantes :*

- ☐ *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $|x| > 0$ *;*
- ☑ *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geqslant 0$ *;*
- ☐ *Il existe un* $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 0$ *;*
- ☑ *Il existe un* $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leqslant 0$*.*

La première assertion est fausse : il suffit de prendre $x = 0$.

La seconde assertion est vraie. En effet, si $x \geqslant 0$, $|x| = x \geqslant 0$; si $x \leqslant 0$, $|x| = -x \geqslant 0$. Donc, $|x| \geqslant 0$ quel que soit x.

La troisième assertion est fausse. Elle est la négation de la seconde qui elle est vraie.

La quatrième assertion est vraie. C'est la négation de la première qui elle est fausse. On peut aussi le voir directement car $x = 0$ est un exemple de x vérifiant $|x| \leqslant 0$.

Question 10. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On veut déterminer l'ensemble des x tels que $f(x) \leqslant 0$. On sait que*

$$\text{si } x > 0, \quad f(x) \leqslant 0 \iff x \leqslant 5 \tag{1}$$

$$\text{si } x \leqslant 0, \quad f(x) \leqslant 0 \iff x \leqslant -2 \tag{2}$$

Quelle est la solution de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$?

L'équivalence (1) dit que, parmi les $x > 0$, ceux qui satisfont à l'inéquation vérifient $x \leqslant 5$. Donc, parmi les $x > 0$, seuls les $x \in]0, 5]$ satisfont $f(x) \leqslant 0$. De la même manière, (2) affirme que, tous les $x \leqslant 0$ qui sont solution vérifient $x \in]-\infty, -2]$. En conclusion, l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui sont solution est $]-\infty, -2] \cup]0, 5]$.

Question 11. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction. Supposons qu'on sache que*

$$f(x) \leqslant 0 \iff 2 \leqslant x \leqslant 3. \qquad (3)$$

Quelle est la solution de l'inéquation $f(x+1) \leqslant 0$ *?*

Étant donné (3), on a que $f(x+1) \leqslant 0 \iff 2 \leqslant x+1 \leqslant 3 \iff 1 \leqslant x \leqslant 2$. La solution est donc $x \in [1,2]$.

Question 12. *Soient les matrices* $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$*. Calculez* $A \cdot B$ *et déduisez en la matrice* B^{-1}*.*

On calcule aisément que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour avoir la matrice identité à partir du produit AB, il suffit d'additionner -2 fois la troisième ligne à la première. Matriciellement celà ce traduit par :

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E \cdot AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{id}$$

L'égalité ci-dessous exprime que $(EA)B = \mathrm{id}$, c'est à dire que*

$$B^{-1} = EA = \begin{pmatrix} 7/2 & 1/2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

*Calculer EA revient à ajouter -2 fois la troisième ligne de A à la première ligne de A.

Question 13.

Discutez l'existence de solution(s) (et les calculer quand elle(s) existe(nt)) en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ pour le système :

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ ax + by = b \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

Le système s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$. En soustrayant à la deuxième (resp. troisième) équation a (resp. b) fois la première, on obtient le système équivalent :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & a+b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ a+b \\ b \end{pmatrix}.$$

Pour qu'il puisse exister une solution, il faut que les deux dernières équations soient compatibles : $a + b = (a + b)y = b$, càd $a = 0$. Si $a = 0$, les deux dernières équations s'écrivent $by = b$. Si $b \neq 0$, on en déduit $y = 1$ et donc, au vu de la première équation, $x = y - 1 = 0$. Si au contraire $b = 0$, seule la première équation donne une contrainte entre x et y : $x = y - 1$, équation qui possède une infinité de solutions.

En conclusion : si $a \neq 0$, pas de solutions ; si $a = 0$ et $b \neq 0$, on a une unique solution $(x, y) = (0, 1)$; si $a = 0 = b$, on a une infinité de solutions $(x, y) = \lambda(1, 1) + (0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.