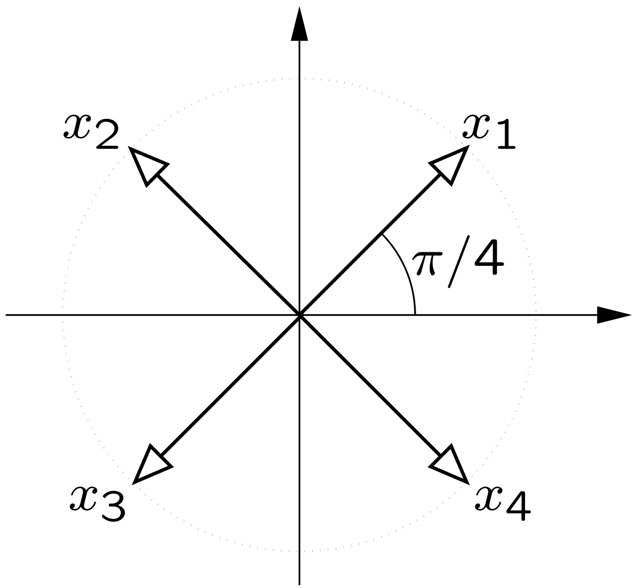
Question 1.

- *Calculez les solutions de $x^4 = -1$.*
- *Représentez ces solutions graphiquement.*

Il suffit de trouver une seule racine de l'équation $x^4 = -1$ étant donné que les autres seront obtenues par multiplication de cette racine par les quatres racines quatrièmes de l'unité : ξ^0, ξ, ξ^2, ξ^3. Un tel ξ est facile à trouver : il suffit de prendre $\xi := \mathbf{i}$ (on aurait également pû choisir $\xi := -\mathbf{i}$). Comme $-1 = \cos(\pi) + \mathbf{i}\sin(\pi)$, une racine quatrième de -1 est $\cos(\pi/4) + \mathbf{i}\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 + \mathbf{i}\sqrt{2}/2$. Les quatres solutions recherchées sont donc :

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad x_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Question 1 (suite).

- *Les solutions trouvées précédemment sont-elles également solutions de l'équation $x^8 = 1$? Justifiez.*

Oui. En effet, si x vérifie $x^4 = -1$, alors $x^8 = (x^4)^2 = (-1)^2 = 1$.

Question 2. *Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z = |z|$. Justifiez votre réponse.*

Puisque $|z| \in \mathbb{R}$, les seules solutions possibles sont des nombres réels. Dans les réels, le module et la valeur absolue sont une et même chose. De la définition de la valeur absolue, on déduit que $z = |z| \iff z \geqslant 0$. L'ensemble des solutions possibles est donc $\mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{C}$.

Question 3. *Calculez le déterminant*

$$\begin{vmatrix} a-p & a & a \\ b & b-p & b \\ c & c & c-p \end{vmatrix}$$

où $a+b+c=2p$.

$$\begin{vmatrix} a-p & a & a \\ b & b-p & b \\ c & c & c-p \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3 \text{ et } a+b+c=p}{=} \begin{vmatrix} a+b+c-p & a+b+c-p & a+b+c-p \\ b & b-p & b \\ c & c & c-p \end{vmatrix}$$

$$= p \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & b-p & b \\ c & c & c-p \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2-C_1 \text{ et } C_3 \leftarrow C_3-C_1}{=} p \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ c & 0 & -p \end{vmatrix} \underset{\text{dét. d'une matrice triangulaire}}{=} pp^2 = p^3$$

Question 4. *Calculez le déterminant de la matrice $n \times n$:*

$$\begin{pmatrix} a+b & a & a & \cdots & a & a \\ a & a+b & a & \cdots & a & a \\ a & a & a+b & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a & a+b \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+\cdots+C_n}{=} \begin{vmatrix} na+b & a & \cdots & a \\ na+b & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ na+b & a & \cdots & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (na+b) \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \cdots & a+b \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \ldots, L_n \leftarrow L_n - L_1}{=} (na+b) \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} = (na+b)b^{n-1}$$

Question 5. *Donnez le domaine des fonctions :*

- $f : \mathbb{R} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 3x - 10}$ ■ $g : \mathbb{R} \circ\!\!\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2 - |x|}$

Pour que l'expression qui définit f ait un sens, il faut et il suffit que $x^2 + 3x - 10 \neq 0$. Or, les racines de ce polynôme sont -5 et 2. En conséquence $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-5, 2\}$.

En ce qui concerne g, $x \in \operatorname{Dom} g$ ssi $x^2 - |x| \geqslant 0$. Cette inéquation est équivalente à : $x \leqslant -1$, ou $x = 0$, ou $x \geqslant 1$. C'est dire que $\operatorname{Dom} g =]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[$.

Question 5 (suite). *Donnez l'image de la fonction h définie par :*

- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin x$

La fonction h est-elle injective ? surjective ?

Soit $y \in \mathbb{R}$. L'équation $y = h(x)$ a une solution — à savoir $x = \arcsin(y)$ — ssi $-1 \leqslant y \leqslant 1$. C'est dire que $\operatorname{Im} h = [-1, 1]$.

Puisque $h(0) = h(\pi)$ et que $0 \neq \pi$, la fonction h n'est *pas* injective. Elle n'est pas non plus surjective car $\operatorname{Im} h \neq \mathbb{R}$.

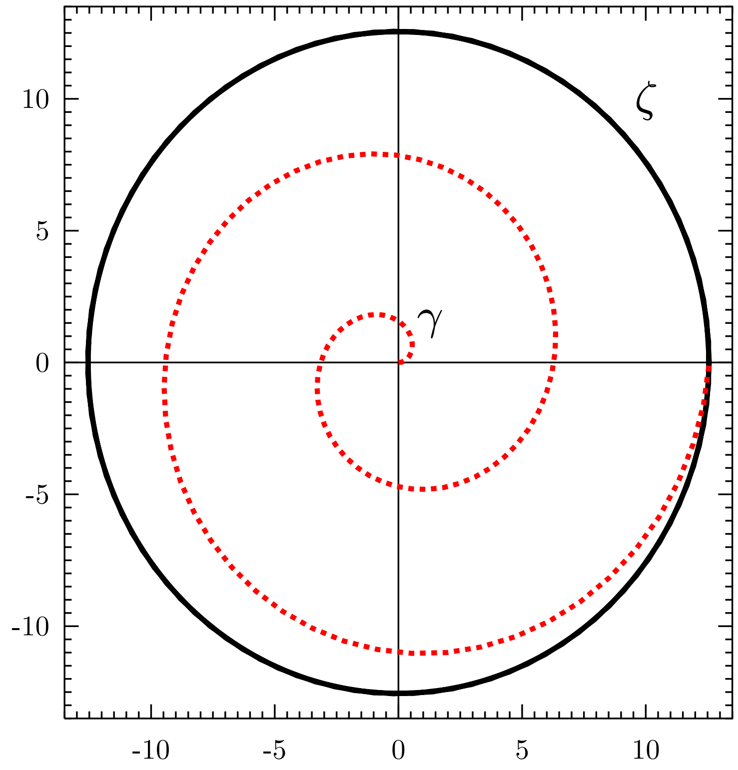
Question 6. *Soient les fonctions ζ et γ définies par :*

- $\zeta : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2 : \theta \mapsto 4\pi(\cos\theta, \sin\theta)$
- $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2 : \theta \mapsto \theta(\cos\theta, \sin\theta)$

Dessinez leurs images.

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\zeta &= \Big\{(x,y) : (x,y) = h(\theta) \\ &\qquad\qquad \text{pour un } \theta \in [0,4\pi]\Big\} \\ &\subseteq \Big\{(x,y) : x^2 + y^2 = (4\pi)^2\Big\}\end{aligned}$$

Donc, l'image de ζ est sur le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\rho = 4\pi$.



Comme $\theta \in [0, 4\pi]$ peut être interprété comme l'angle avec l'axe des x, on fait deux tours (l'image est donc le cercle complet). On a pour γ le même genre d'interprétation sauf que le rayon ρ dépend de l'angle θ : $\rho(\theta) = \theta$. On a donc une spirale commencant avec un rayon $\rho = 0$ et fait deux tours, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, jusqu'à atteindre $\rho = 4\pi$.