

Mathématique Élémentaire

Test n° 6

(23 octobre 2000)

Nom :

Prénom :

Section :

Avant d'aller plus loin, veuillez mettre votre nom, prénom et section en lettres MAJUSCULES sur *toutes* les feuilles.

Question 1. Calculez

$$\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n (k-1) - \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n (\ell-1)$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Soit M_n la matrice $n \times n$ suivante :

$$M_n := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calculez le déterminant de M_2 , M_3 et M_4 ;
- Démontrez par récurrence que $\det M_n = (-1)^{n(n-1)/2}$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Soit le système

$$\begin{cases} x + y + (1 - m)z = m + 2 \\ (1 + m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m + 2 \end{cases}$$

- Discutez de l'existence de solution(s) (et les calculer quand elle(s) existe(nt)) en fonction de m *uniquement* dans le cas où le déterminant de la matrice des coefficients est nul.
- Interprétez géométriquement les résultats.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Soit le système

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ -x + 3y = -11 \\ 3x + ay = 18 \end{cases}$$

Sans résoudre le système, déterminez la valeur de a pour que ce système ait une solution unique.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2x - |x|$.

- Prouvez que la relation suivante est vraie :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ 3x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

- Tracez le graphe de la fonction f ;
- Déterminez le domaine et l'image de f ;
- f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifiez par un calcul ou un contre-exemple.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 3x^2 + 2xy + 5y^2$. Calculez $\partial_x f(x, y)$, $\partial_y f(x, y)$, $\partial_x f(1, 2)$, $\partial_y f(1, 2)$.