Question 1. *Calculez*

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}(k-1)-\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}(\ell-1)$$

On peut regrouper les deux sommes en $\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\Big((k-1)-(\ell-1)\Big)$. On a alors une somme du type $\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}a_{k\ell}$ où les $a_{k\ell}$ sont antisymétriques : $a_{\ell k}=-a_{k\ell}$. La matrice associée à cette somme est en conséquence aussi antisymétrique (les éléments diagonaux sont nuls). La somme de tous les éléments de cette matrice est dès lors 0.

Une autre manière de procéder est de remarquer que faire la somme ligne par ligne ou colonne par colonne ne change rien au résultat. C'est dire qu'on peut permuter les sommes : $\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}(k-1)-\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\ell-1)$. Mais on voit alors que la deuxième double somme est la même que la première au nom des indices près. Leur différence est donc 0.

Question 2. *Démontrez que* $\operatorname{dét} M_n = (-1)^{n(n-1)/2}$ *où*

$$M_n := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $n = 1$, on a $\operatorname{dét}\begin{pmatrix}1\end{pmatrix} = 1$. La matrice M_{n+1} est construite à partir de M_n en (par exemple) lui ajoutant une première colonne du type $\begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}^t$ et une dernière ligne du type $\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$, le 1 étant à l'intersection des deux. Plus graphiquement, on a

$$M_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \\ \vdots & \boxed{\quad M_n \quad} \\ 0 & \\ 1 & 0 \quad \dots \quad 0 \end{pmatrix}$$

En développant selon la première colonne (qui comporte $n+1$ éléments), on trouve

$$\begin{aligned} \operatorname{dét} M_{n+1} &= (-1)^{n+2} \operatorname{dét} M_n \\ &= (-1)^n \cdot (-1)^{n(n-1)/2} \\ &= (-1)^{n(2+n-1)/2} \\ &= (-1)^{n(n+1)/2} \end{aligned}$$

Question 3. *Soit le système* $\begin{cases} x+y+(1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases}$

Discutez de l'existence de solution(s) en fonction de m uniquement *dans le cas où le déterminant de la matrice des coefficients est nul. Interprétez géométriquement les résultats.*

Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ m+1 & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix}$. On a

$$\text{dét}\, A \overset{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1-m \\ m+2 & -1 & 2 \\ m+2 & -m & 3 \end{vmatrix} = (m+2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1-m \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -m & 3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{=} (m+2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1-m \\ 0 & m-1 & -1 \\ 1 & -m & 3 \end{vmatrix} = (m+2)(m^2-2m) = m(m+2)(m-2)$$

1^{er} cas $m = 0$

Le système s'écrit : $\begin{cases} x + y + z = 2 & \Rightarrow \alpha_1 \perp \overrightarrow{v}_1 := (1, 1, 1) \\ x - y + 2z = 0 & \Rightarrow \alpha_2 \perp \overrightarrow{v}_2 := (1, -1, 2) \\ 2x + 3z = 2 & \Rightarrow \alpha_3 \perp \overrightarrow{v}_3 := (2, 0, 3) \end{cases}$

Interprétation géométrique : Puisque $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ ne sont pas colinéaires, $\alpha_1 \cap \alpha_2 = D_{12} \neq \varnothing$. De plus, on remarque que $\overrightarrow{v}_3 = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2$ et $b_3 = b_1 + b_2$. Donc, $D_{12} \subseteq \alpha_3$.

Pour décrire la droite D_{12}, on résoud le système

$$\begin{cases} x + y + z = 2 & (1) \\ x - y + 2z = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow x = 2 - y - z, \quad (2) \Rightarrow z = -2 + 2y, \quad (1) \Rightarrow x = 4 - 3y.$

$S = \left\{(4 - 3y, y, -2 + 2y) : y \in \mathbb{R}\right\}$. C'est la droite passant par $(4, 0, 2)$ et de vecteur directeur $(-3, 1, 2)$. Le système est donc simplement indéterminé.

2^{e} cas $m = -2$

Le système s'écrit : $\begin{cases} x + y + 3z = 0 & \Rightarrow \alpha_1 \perp \overrightarrow{v}_1 := (1,1,3) \\ -x - y + 2z = 0 & \Rightarrow \alpha_2 \perp \overrightarrow{v}_2 := (-1,-1,2) \\ 2x + 2y + 3z = 0 & \Rightarrow \alpha_3 \perp \overrightarrow{v}_3 := (2,2,3) \end{cases}$

Interprétation géométrique : Puisque $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ ne sont pas colinéaires, $\alpha_1 \cap \alpha_2 = D_{12} \neq \varnothing$. Ici par contre, une relation entre $\overrightarrow{v}_3$, $\overrightarrow{v}_2$ et $\overrightarrow{v}_1$ n'apparaît pas immédiatement.*

Résolvons d'abord le système

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

afin de déduire D_{12}. On trouve comme ensemble de solutions $S = \Big\{(-y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\Big\}$. C'est la droite passsant par $(0,0,0)$ de vecteur directeur $(-1,1,0) =: \overrightarrow{v}$. En remarquant que $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{v}_3$, nous savons que : soit $D_{12} \subseteq \alpha_3$, soit $D_{12} \parallel \alpha_3$. Comme le point $(0,0,0)$ vérifie l'équation de α_3, on a $D_{12} \subseteq \alpha_3$. Le système est donc simplement indéterminé.

*On peut calculer que $\overrightarrow{v}_3 = (7/5)\overrightarrow{v}_1 - (3/5)\overrightarrow{v}_2$!

3^e cas $m = 2$

Le système s'écrit : $\begin{cases} x + y - z = 4 & \Rightarrow \alpha_1 \perp \overrightarrow{v}_1 := (1, 1, -1) \\ 3x - y + 2z = 0 & \Rightarrow \alpha_2 \perp \overrightarrow{v}_2 := (3, -1, 2) \\ 2x - 2y + 3z = 4 & \Rightarrow \alpha_3 \perp \overrightarrow{v}_3 := (2, -2, 3) \end{cases}$

Comme $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ ne sont pas colinéaires, $\alpha_1 \cap \alpha_2 = D_{12} \neq \varnothing$. De plus, $\overrightarrow{v}_3 = \overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{v}_1$ et $b_3 \neq b_2 - b_1$. Nous en déduisons que $D_{12} \parallel \alpha_3$. Le système est donc impossible.

Question 4. Sans le résoudre, *déterminez la valeur de* a *pour que le système suivant ait une solution unique.*

$$\begin{cases} 2x - y = 7 & \Rightarrow D_1 \perp \overrightarrow{v}_1 := (2, -1) \\ -x + 3y = -11 & \Rightarrow D_2 \perp \overrightarrow{v}_2 := (-1, 3) \\ 3x + ay = 18 & \Rightarrow D_3 \perp \overrightarrow{v}_3 := (3, a) \end{cases}$$

Le système possède une solution unique ssi $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\overrightarrow{v}_3 = \alpha \overrightarrow{v}_1 + \beta \overrightarrow{v}_2 \quad \text{et} \quad b_3 = \alpha b_1 + \beta b_2.$$

Cela revient à résoudre le système

$$\begin{cases} 18 = 7\alpha - 11\beta & (1) \\ 3 = 2\alpha - \beta & (2) \\ a = -\alpha + 3\beta & (3) \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow \beta = 2\alpha - 3$, (1) $\Rightarrow 18 = 7\alpha - 22\alpha + 33 \Rightarrow \alpha = 1$, (2) $\Rightarrow \beta = -1$, (3) $\Rightarrow a = -1 - 3 = -4$.

Question 4 (suite).

$$\begin{cases} 2x - y = 7 & \Rightarrow D_1 \perp \overrightarrow{v}_1 := (2, -1) \\ -x + 3y = -11 & \Rightarrow D_2 \perp \overrightarrow{v}_2 := (-1, 3) \\ 3x + ay = 18 & \Rightarrow D_3 \perp \overrightarrow{v}_3 := (3, a) \end{cases}$$

Le raisonnement suivant n'est pas correct.

Le système possède une solution unique ssi $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\overrightarrow{v}_3 = \alpha \overrightarrow{v}_1 + \beta \overrightarrow{v}_2 \quad \text{et} \quad b_3 = \alpha b_1 + \beta b_2.$$

Or, $b_3 = b_1 - b_2$. Donc, il faut que $\overrightarrow{v}_3 = \overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{v}_2$ càd $(3, a) = (2, -1) - (-1, 3)$. On obtient $a = -4$.

En effet, il s'applique aussi au système

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ ay = 0 \end{cases}$$

et donne $(0, a) = (1, 1) - (1, -1) = (0, 2)$ alors que la solution est $a \in \mathbb{R}$.

Question 5. *Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x - |x|$.*

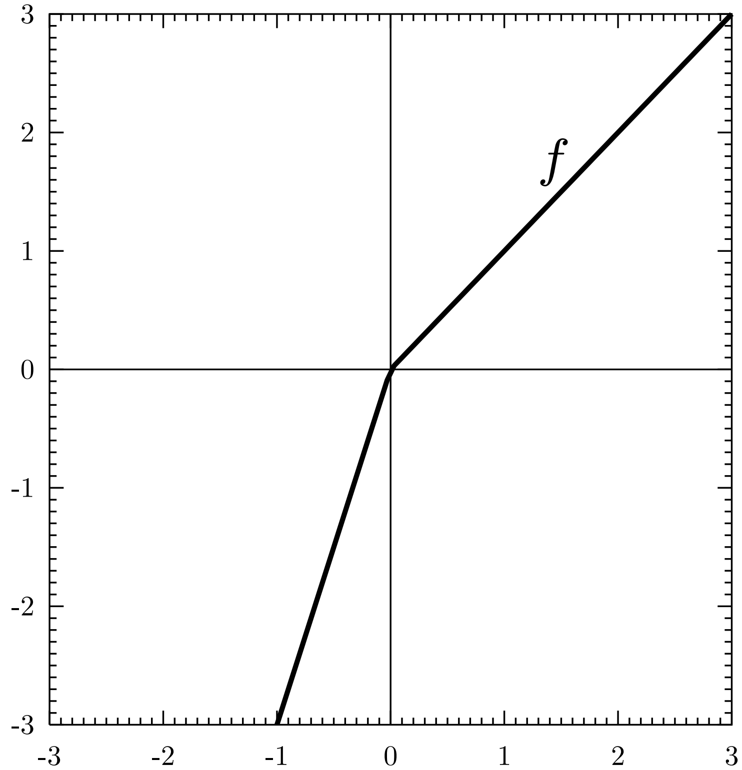
- *Prouvez que la relation suivante est vraie :*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ 3x & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases} \qquad (1)$$

- *Tracez le graphe de la fonction f ;*

Lorsque $x \geqslant 0$, $|x| = x$ et donc $f(x) = 2x - |x| = x$. De manière analogue, lorsque $x \leqslant 0$, $|x| = -x$, d'où $f(x) = 2x - (-x) = 3x$.

Grâce à cette relation, tracer le graphe est facile puisque, pour $x \leqslant 0$, c'est la droite $x \mapsto 3x$ et, pour $x \geqslant 0$, c'est la droite $x \mapsto x$ (la diagonale).



Question 5 (suite).

- *Déterminez le domaine et l'image de f ;*

Comme $f(x)$ est définie quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$. Par définition de l'image, on peut écrire :

$$\operatorname{Im} f = \Big\{ y \in \mathbb{R} \ : \ \exists x \in \mathbb{R},\ y = f(x) \Big\}.$$

Il nous faut donc voir pour quels y l'équation $y = f(x)$ est résoluble. Si $y = 0$, $f(0) = 0$ donc $x = 0$ est une solution. Si $y < 0$, on choisit $x := y/3 < 0$. C'est bien une solution car, au vu de (1), $f(x) = 3x = y$. Si $y > 0$, on prend $x := y$. De nouveau, c'est une solution car $f(x) = x = y$.

En conclusion : quel que soit $y \in \mathbb{R}$, on peut trouver un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. Autrement dit $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.

Question 5 (suite).

- *f est-elle injective ? surjective ? bijective ?*

f est injective

Soit $f(x_1) = f(x_2)$. La première chose à remarquer est que (1) implique $x \geqslant 0 \iff f(x) \geqslant 0$. Donc, si $f(x_1) = f(x_2) \geqslant 0$, nécessairement $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 \geqslant 0$. Mais sur $[0, +\infty[$, $f(x) = x$ et on en déduit que $x_1 = f(x_1) = f(x_2) = x_2$. Si, au contraire, $f(x_1) = f(x_2) < 0$, nécessairement $x_1 \leqslant 0$ et $x_2 \leqslant 0$. De nouveau, (1) implique que $3x_1 = f(x_1) = f(x_2) = 3x_2$. *Conclusion :* dans tous les cas $x_1 = x_2$ et f est bien injective.

f est surjective

En effet, on vient de prouver que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.

Question 5 (suite).

- *f est-elle injective ? surjective ? bijective ?*

f est bijective

C'est le cas car f est définie sur tout l'ensemble de départ ($\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$) et f est à la fois injective et surjective. On peut même écrire son inverse :

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \geqslant 0 \\ y/3 & \text{si } y \leqslant 0 \end{cases}$$

Question 6. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 3x^2 + 2xy + 5y^2$*.*
Calculez $\partial_x f(x, y)$*,* $\partial_y f(x, y)$*,* $\partial_x f(1, 2)$*,* $\partial_y f(1, 2)$*.*

$$\partial_x f(x, y) = \partial_x(3x^2 + 2xy + 5y^2) = 6x + 2y$$

$$\partial_y f(x, y) = \partial_y(3x^2 + 2xy + 5y^2) = 2x + 10y$$

$$\partial_x f(1, 2) = (\partial_x f)(1, 2) = (6x + 2y)\restriction_{x=1,y=2} = 10$$

$$\partial_y f(1, 2) = (\partial_y f)(1, 2) = (2x + 10y)\restriction_{x=1,y=2} = 22$$