Mathématique Élémentaire

Examen (29 octobre 2001)

Nom :
Prénom :
Section :

- Veuillez commencer par écrire en lettres majuscules votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.
- Les *explications sont* aussi *importantes* que les résultats. Rappelez vous que nous ne voyons pas ce que vous pensez, seulement ce que vous avez écrit.
- Ne confondez pas la *rédaction* de vos réponses avec celle de vos brouillons !
- La grandeur des espaces laissés après les questions vous donne une *indication* sur la *longueur des réponses* attendue. N'employez *pas* le dos de la feuille *précédente* !

Question 1. Calculez les dérivées suivantes :

- $\partial_x\bigl(x\,\mathrm{e}^{x\sqrt{y}+x^2} + (\operatorname{tg} x)\arcsin y\bigr) =$

- $\partial_y\bigl(x\,\mathrm{e}^{x\sqrt{y}+x^2} + (\operatorname{tg} x)\arcsin y\bigr) =$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. Niez, en bon français, l'affirmation suivante : « Si je lis bien cette question, alors je la trouverai triviale ».

Question 3. Donnez la table de vérité de la proposition $\big((A \Rightarrow B) \vee C\big) \Leftrightarrow (C \Rightarrow B)$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 4. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) = -3x - 2y$. On considère le système de contraintes

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ x + y \leqslant 2 \\ y \geqslant \alpha x \end{cases} \tag{1}$$

où $\alpha \in]0, +\infty[$. On est intéressé à minimiser la fonction f sur l'ensemble des (x, y) qui satisfont (1). Pour quelle(s) valeur(s) de α le minimum est-il atteint au point $(1, 1)$?

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5. Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} x & -y & -z & -u \\ y & x & u & -z \\ z & -u & x & y \\ u & z & -y & x \end{pmatrix} \qquad \text{où } x, y, z, u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(a) Calculez $M \cdot M^t$.

(b) Déduisez-en M^{-1}.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Considérons le système

$$\begin{cases} x\cos\theta - y\sin\theta = \pi \\ x\sin\theta + y\cos\theta = 1/\pi \end{cases}$$

où les inconnues sont x, y et $\theta \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Déterminez pour quelle(s) valeur(s) de θ le système possède une solution unique.

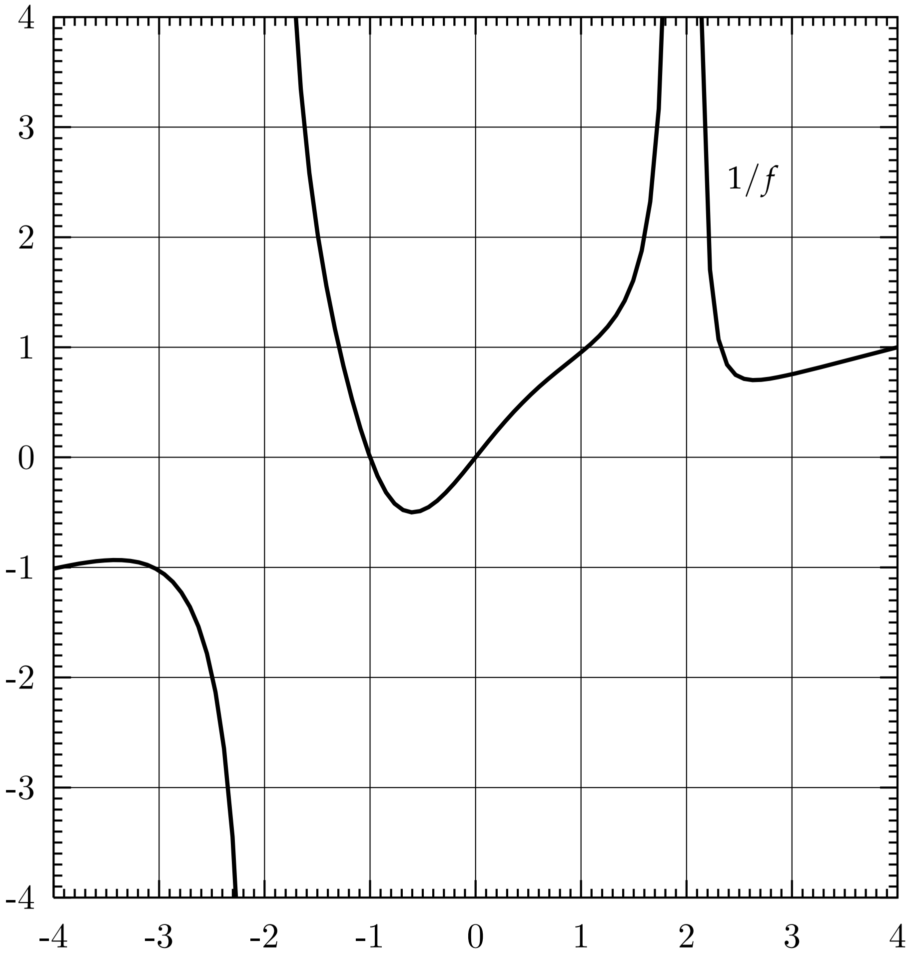
Question 7. Montrez que, si $-1 \leqslant x \leqslant 1$, alors $0 \leqslant x^2 \leqslant |x|$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 8. Soit $f : [-4,4] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur son domaine de définition. Sachant que le graphe ci-dessous représente la fonction $[-4,4] \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/f(x)$,

- esquissez de votre mieux le graphe de f ;
- donnez les racines de f.

Justifiez votre démarche.



Nom :
Prénom :
Section :

Question 9. Soient D la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation paramétrique

$$(x, y) = (1, -3) + \lambda(-2, 5), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

et la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (2x - y, 2y - x).$$

(a) Montrez que la fonction f est une application linéaire.

(b) Prouvez que l'image de D par f est encore une droite. On la notera D'.

(c) Écrivez une équation cartésienne de D'.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9 (suite). Continuez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \big(\sin t, \sin(2t)\big)$.

- Donnez des équations cartésiennes des tangentes à l'image de u aux points $u(\pi/2)$ et $u(0)$.

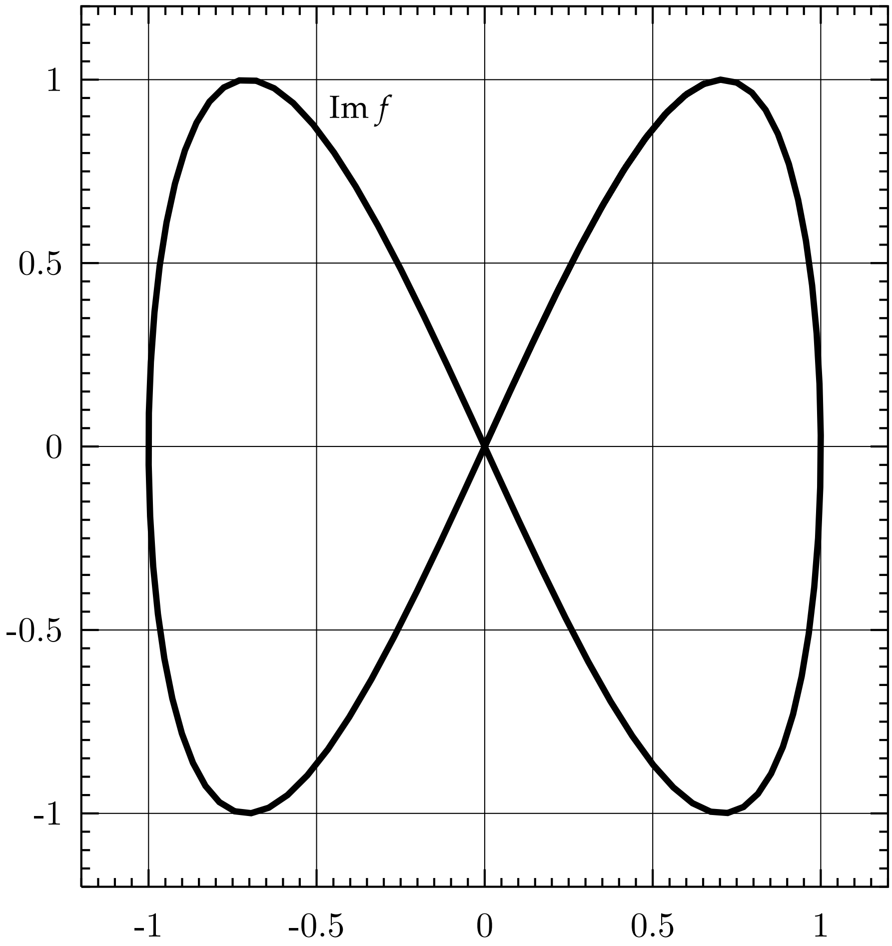
Nom :

Prénom :

Section :

Question 10 (suite). Rappelons que $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \big(\sin t, \sin(2t)\big)$.

- Le graphe ci-dessous représente l'image de u. Interprétez géométriquement les tangentes calculées ci-dessus. Pouvez-vous retouver visuellement les équations obtenues ? Justifiez.



Nom :

Prénom :

Section :

Question 11. Prouvez par récurrence que

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 \qquad \text{pour } n \geqslant 3.$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 12. Calculez,

- pour $t \geqslant -3$: $\sum_{j=-3}^{t} \pi$

- pour $n \geqslant 0$: $\sum_{t=0}^{n} (2t - t^2 \boldsymbol{i})$

- pour $n \geqslant 2$: $\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} k(ij)(i-j)$

Question 13. Justifiez brièvement toutes vos réponses.

- Calculez $(1+2\boldsymbol{i})(4+3\boldsymbol{i})$, $(1+2\boldsymbol{i})-(4+3\boldsymbol{i})$.

- Calculez le module de $\dfrac{(1+2\boldsymbol{i})^2}{(4+3\boldsymbol{i})^3}$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 13 (suite). Justifiez brièvement toutes vos réponses.

- Calculez le module des solutions complexes de l'équation $z^3 = 8$ (sans calculer les solutions).

- Calculez la forme trigonométrique de $\frac{3}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- Calculez les arguments des solutions complexes de l'équation $z^6 = \sqrt{12736812}$ (sans calculer les solutions).

- Prouvez que $\left(\frac{3}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 = -27$.

- Prouver que les solutions complexes de $z^6 = -27$ sont les nombres

$$\left(\frac{3}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \operatorname{cis}\left(k\frac{2\pi}{6}\right) \qquad \text{avec } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 14. Tout nombre complexe s'écrit $x \cdot 1 + y \cdot \boldsymbol{i}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et on lui associe le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soit $z = a + b\boldsymbol{i} \in \mathbb{C}$. L'application

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \Big(\mathfrak{Re}\big[z(x + y\boldsymbol{i})\big], \mathfrak{Im}\big[z(x + y\boldsymbol{i})\big]\Big).$$

est une application linéaire (ne le vérifiez pas). Calculez la matrice associée à cette application linéaire. Prouvez que le déterminant est $|z|^2$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 15. (Bonus) Ci-après, vous trouverez un algorithme. On vous demande de décrire dans le tableau ci-dessous le contenu des variables X, Y, A, B, C, D durant l'exécution du programme quand X est initialisé à 12 et Y est initialisé à 8 (c'est-à-dire $x = 12$ et $y = 8$). Les lignes Q, R, A', B' sont là pour vous y aider.

$X \leftarrow x$; $Y \leftarrow y$

$A \leftarrow 1$; $B \leftarrow 0$; $C \leftarrow 0$; $D \leftarrow 1$

Tant que $Y > 0$ faire

$$\begin{cases} Q \leftarrow X \operatorname{div} Y \\ R \leftarrow X \operatorname{mod} Y \\ X \leftarrow Y \\ Y \leftarrow R \\ A' \leftarrow A \;;\; B' \leftarrow B \\ A \leftarrow C \;;\; B \leftarrow D \\ C \leftarrow A' - CQ \\ D \leftarrow B' - DQ \end{cases}$$

Variables	1 : Initialisation	2	3
X			
Y			
A			
B			
C			
D			
Q			
R			
A'			
B'			

Raison de l'arrêt :

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 15 (suite). Nous avons inclu dans le programme l'invariant entre crochets (comme il est de coutume). Prouvez qu'il s'agit bien de l'invariant.

$$
\begin{array}{l}
X \leftarrow x \;;\; Y \leftarrow y \\
A \leftarrow 1 \;;\; B \leftarrow 0 \;;\; C \leftarrow 0 \;;\; D \leftarrow 1 \\
\langle \boldsymbol{X = Ax + By} \text{ et } \boldsymbol{Y = Cx + Dy} \rangle \\
\text{Tant que } Y > 0 \text{ faire} \\
\qquad \left\{ \begin{array}{l}
Q \leftarrow X \operatorname{div} Y \\
R \leftarrow X \operatorname{mod} Y \\
X \leftarrow Y \\
Y \leftarrow R \\
A' \leftarrow A \;;\; B' \leftarrow B \\
A \leftarrow C \;;\; B \leftarrow D \\
C \leftarrow A' - CQ \\
D \leftarrow B' - DQ \\
\langle \boldsymbol{X = Ax + By} \text{ et } \boldsymbol{Y = Cx + Dy} \rangle
\end{array} \right.
\end{array}
$$