Question 1. *Calculez les dérivées suivantes :*

- $\partial_x\left(x\,\mathrm{e}^{x\sqrt{y}+x^2} + (\operatorname{tg} x)\arcsin y\right)$
- $\partial_y\left(x\,\mathrm{e}^{x\sqrt{y}+x^2} + (\operatorname{tg} x)\arcsin y\right)$

$$
\begin{aligned}
&\partial_x\left(x\,\mathrm{e}^{x\sqrt{y}+x^2} + (\operatorname{tg} x)\arcsin y\right)\\
&\qquad = \partial_x(x)\,\mathrm{e}^{x\sqrt{y}+x^2} + x\partial_x\left(\mathrm{e}^{x\sqrt{y}+x^2}\right) + \partial_x(\operatorname{tg} x)\arcsin y\\
&\qquad = \mathrm{e}^{x\sqrt{y}+x^2} + x\,\mathrm{e}^{x\sqrt{y}+x^2}\,\partial_x(x\sqrt{y}+x^2) + \frac{1}{\cos^2 x}\arcsin y\\
&\qquad = (1 + x\sqrt{y} + 2x^2)\,\mathrm{e}^{x\sqrt{y}+x^2} + \frac{1}{\cos^2 x}\arcsin y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_y\left(x\,\mathrm{e}^{x\sqrt{y}+x^2} + (\operatorname{tg} x)\arcsin y\right) = x\,\mathrm{e}^{x\sqrt{y}+x^2}\,\partial_y\left(x\sqrt{y}+x^2\right) + (\operatorname{tg} x)\partial_y(\arcsin y)\\
&\qquad = \frac{x^2}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{e}^{x\sqrt{y}+x^2} + \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-y^2}}
\end{aligned}
$$

Question 2. *Niez, en bon français, l'affirmation suivante : « Si je lis bien cette question, alors je la trouverai triviale ».*

La phrase est du type $A \Rightarrow B$ où

$$A : \text{je lis bien cette question}$$
$$B : \text{je la trouverai triviale}$$

Or, $A \Rightarrow B$ est équivalent à $\neg A \vee B$. Donc $\neg(A \Rightarrow B)$ est équivalent à $\neg(\neg A \vee B)$ ou encore à $A \wedge \neg B$.

La négation sera :

« je lis bien cette question et je ne la trouve pas triviale ».

Question 3. *Donnez la table de vérité de la proposition* $\big((A \Rightarrow B) \vee C\big) \Leftrightarrow (C \Rightarrow B)$.

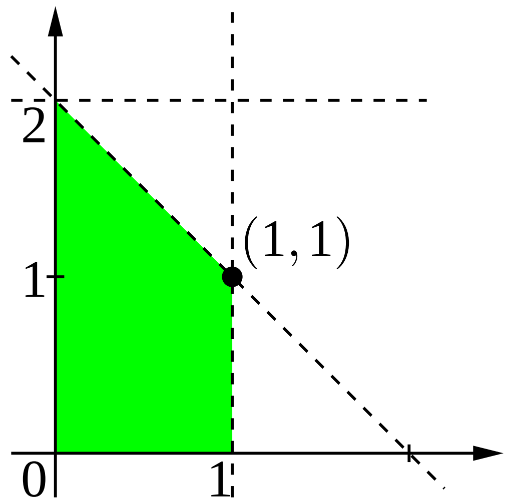
A	B	C	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \vee C$	$C \Rightarrow B$	$((A \Rightarrow B) \vee C) \Leftrightarrow (C \Rightarrow B)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1

Question 4. *Soit la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto f(x,y) = -3x - 2y$ *et le système de contraintes*

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad (1)$$
$$0 \leqslant y \leqslant 2 \qquad (2)$$
$$x + y \leqslant 2 \qquad (3)$$
$$y \geqslant \alpha x \qquad (4)$$

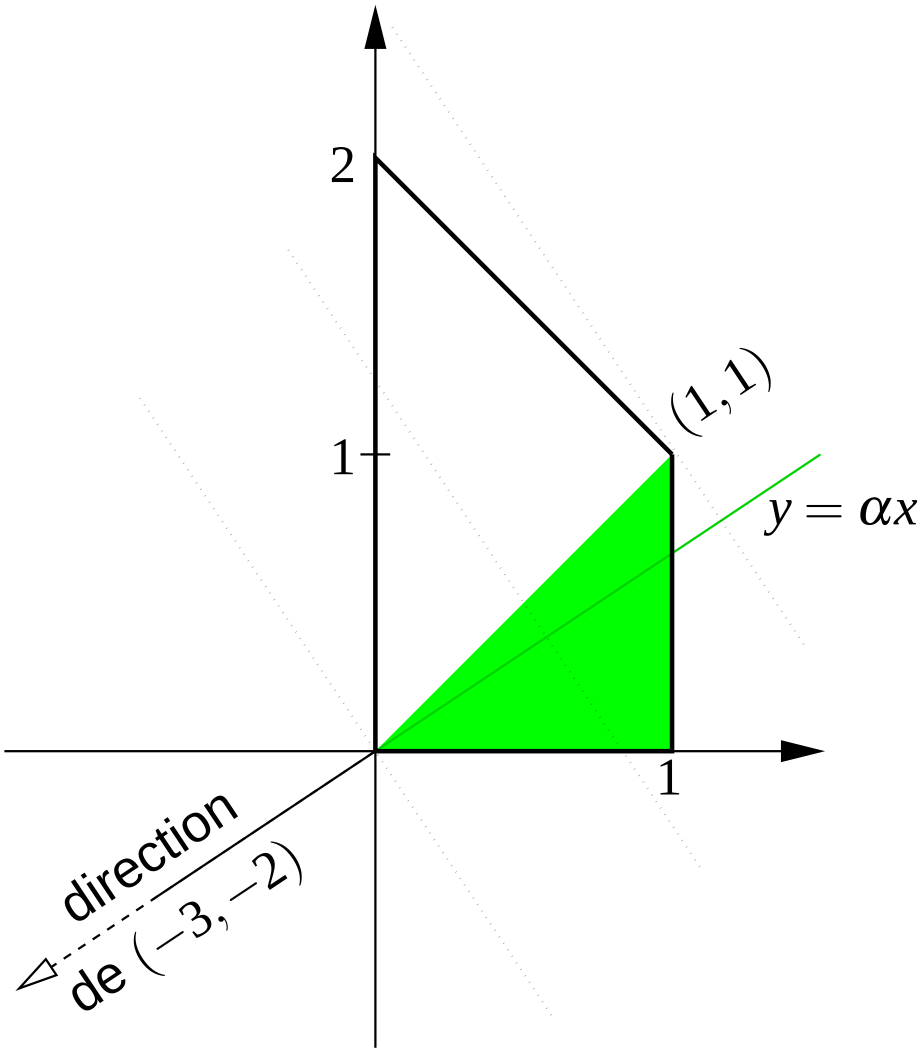
où $\alpha \in \,]0,+\infty[$*. On est intéressé à minimiser la fonction* f *sur l'ensemble des* (x,y) *qui satisfont (1)–(4). Pour quelle(s) valeur(s) de* α *le minimum est-il atteint au point* $(1,1)$ *?*

Commençons par représenter le système des contraintes (1)–(3). Le polygone est déterminé par les sommets $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,1)$ et $(1,0)$. On remarque alors que, si $\alpha > 1$, $(1,1)$ ne sera pas un sommet du polygone des contraintes. Nous sommes donc ramenés à étudier le cas où $0 < \alpha \leqslant 1$.



Question 4 (suite).

Le gradient de la fonction est le vecteur $(-3,-2)$. De par l'orientation de ce vecteur, le minimum recherché sera atteint au dernier sommet rencontré lorsqu'on « balaie » le polygone avec des droites d'équation $-3x-2y=c$, avec des $c \in \mathbb{R}$ de plus en plus petits. Le graphe montre clairement que le minimum recherché est atteint en $(1,1)$



Question 5. *Soit la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} x & -y & -z & -u \\ y & x & u & -z \\ z & -u & x & y \\ u & z & -y & x \end{pmatrix} \qquad \text{où } x,y,z,u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(1) Calculez $M \cdot M^t$.

$$M \cdot M^t = \begin{pmatrix} x & -y & -z & -u \\ y & x & u & -z \\ z & -u & x & y \\ u & z & -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z & u \\ -y & x & -u & z \\ -z & u & x & -y \\ -u & -z & y & x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2+u^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2+y^2+z^2+u^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+y^2+z^2+u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2+y^2+z^2+u^2 \end{pmatrix}$$

Question 5 (suite).

(2) Déduisez-en M^{-1}.

On remarque que $M \cdot M^t = (x^2 + y^2 + z^2 + u^2)\mathbf{1}$ et $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \neq 0$. Donc,

$$M^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + u^2} \cdot M^t$$

Question 6. *Considérons le système*

$$\begin{cases} x\cos\theta - y\sin\theta = \pi \\ x\sin\theta + y\cos\theta = 1/\pi \end{cases}$$

où les inconnues sont x, y *et* $\theta \in \mathbb{R}$ *est un paramètre. Déterminez pour quelle(s) valeur(s) de* θ *le système possède une solution unique.*

Soit $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ la matrice des coefficients du système. Ce système a une solution unique si et seulement si $\det A \neq 0$. Or, $\det A = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. Donc, on a une solution unique quelle que soit la valeur de $\theta \in \mathbb{R}$.

Question 7. *Montrez que, si $-1 \leqslant x \leqslant 1$, alors $0 \leqslant x^2 \leqslant |x|$.*

On a vu au cours que

$$-1 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{est équivalent à} \quad |x| \leqslant 1.$$

En multipliant les deux membres de la seconde inégalité par $|x|$ (ce qui préserve le sens de l'inégalité car $|x| \geqslant 0$), on obtient

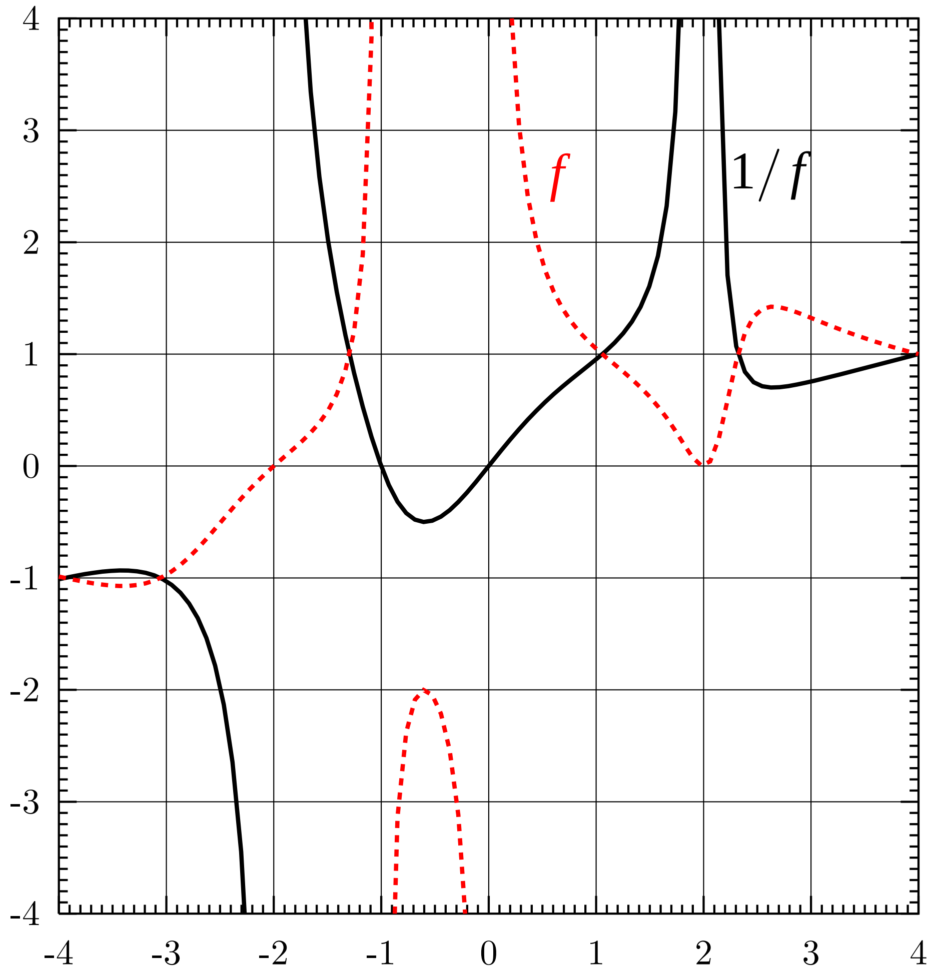
$$|x|^2 \leqslant |x|.$$

Or $|x|^2 = x^2$ (en effet : si $x \geqslant 0$, on a $|x| = x$; si $x < 0$, on a $|x|^2 = (-x)^2 = (-1)^2 x^2 = x^2$). D'autre part, un carré est toujours positif. Donc, on en déduit, comme il est demandé,

$$0 \leqslant x^2 \leqslant |x|.$$

Question 8. *Soit $f : [-4,4] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur son domaine de définition. Sachant que le graphe ci-dessous représente la fonction $[-4,4] \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/f(x)$,*

- *esquissez le graphe de f ;*
- *donnez les racines de f.*



Les racines de f sont les x tels que $f(x) = 0$. Le graphe ci-contre montre que f s'annule aux points $(-2,0)$ et $(2,0)$. Les racines sont donc

$$x = -2 \text{ et } x = 2.$$

Question 9. *Soient D la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation paramétrique*

$$(x,y) = (1,-3) + \lambda(-2,5), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

et la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (2x-y, 2y-x)$.

(1) Montrez que la fonction f est une application linéaire.

Soit $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f\big((x,y)+(x',y')\big) &= f(x+x', y+y') \\
&= \big(2x+2x'-y-y',\ 2y+2y'-x-x'\big) \\
&= (2x-y, 2y-x) + (2x'-y', 2y'-x') \\
&= f(x,y) + f(x',y') \\
f\big(\alpha(x,y)\big) &= f(\alpha x, \alpha y) = \big(2\alpha x - \alpha y,\ 2\alpha y - \alpha x\big) \\
&= \alpha(2x-y, 2y-x) \\
&= \alpha f(x,y)
\end{aligned}$$

Question 9 (suite). *Soient D la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation paramétrique*

$$(x,y) = (1,-3) + \lambda(-2,5), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

et la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (2x-y, 2y-x)$.

(2) Prouvez que l'image D' de D par f est encore une droite.

(3) Écrivez une équation cartésienne de D'.

L'image de D par f est donnée par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f\big((1,-3) + \lambda(-2,5)\big) \\ &= f(1,-3) + \lambda f(-2,5) \qquad \text{par linéarité de } f \\ &= (5,-7) + \lambda(-9,12) \end{aligned}$$

L'image de D est donc la droite D' passant par $(5,-7)$ et dont un vecteur directeur est $(-9,12)$.

Comme une équation paramétrique de D' est $\begin{cases} x = 5 - 9\lambda \\ y = -7 + 12\lambda \end{cases}$, on en déduit, en éliminant λ, qu'une équation cartésienne de D' est $4x + 3y = -1$.

Question 10. *Soit* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \big(\sin t, \sin(2t)\big)$*.*

- *Donnez des équations cartésiennes des tangentes à l'image de* u *aux points* $u(\pi/2)$ *et* $u(0)$*.*

De manière générale, une équation paramétrique de la tangente à $\operatorname{Im} u$ au point $u(t_0)$ est donné par

$$(x,y) = u(t_0) + \lambda\, \partial_t u(t_0), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Comme $\partial_t u(t) = (\cos t, 2\cos(2t))$, on trouve que des équations paramétriques des tangentes en $t = \pi/2$ et $t = 0$ sont, respectivement,

$$(x,y) = (1,0) + \lambda\,(0,-2), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$
$$(x,y) = (0,0) + \lambda\,(1,2), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

En éliminant λ dans chacune de ces équations, on en déduit des équations cartésiennes respectives :

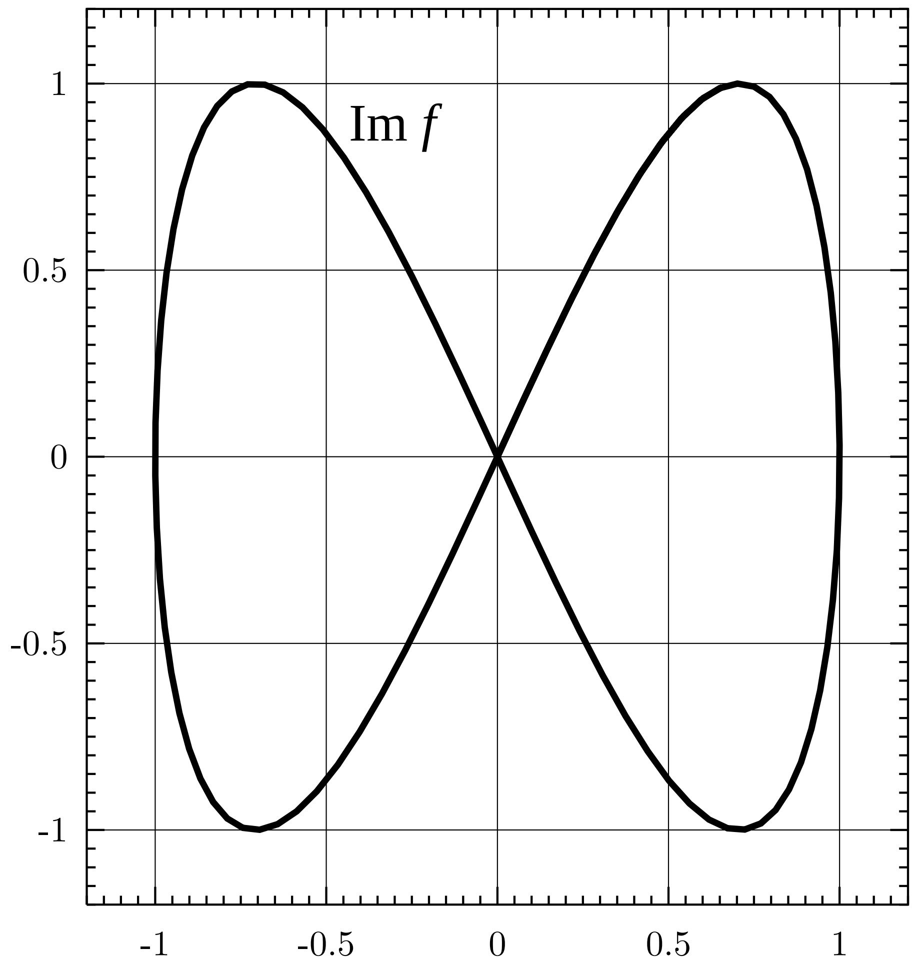
$$\text{en } t = \pi/2, \quad x = 1 \qquad \text{et} \qquad \text{en } t = 0, \quad y = 2x.$$

Question 10 (suite). $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \big(\sin t, \sin(2t)\big)$.

- *Interprétez géométriquement les tangentes calculées ci-dessus. Retouvez visuellement les équations obtenues.*

Le point $u(\pi/2) = (1,0)$ est à l'extrême droite du graphe où on voit que la tangente doit être verticale, c'est-à-dire que son équation est du type $x =?$. Comme elle doit passer par $(1,0)$, l'équation est forcément

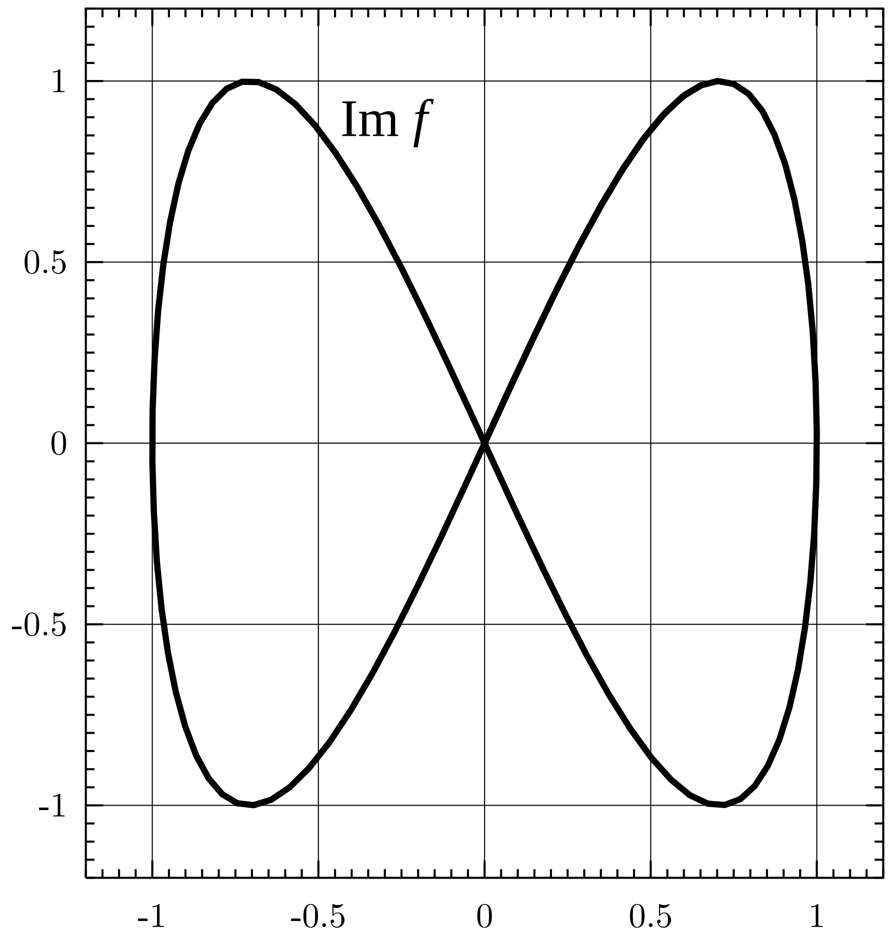
$$x = 1.$$



Question 10 (suite). $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \big(\sin t, \sin(2t)\big)$.

- *Interprétez géométriquement les tangentes calculées ci-dessus.*

En $u(0) = (0,0)$, on a obtenu la tangente d'équation $y = 2x$ qu'on peut constater être correcte. Par contre, on remarque qu'il y a aussi une autre tangente d'équation $y = -2x$ en ce même point. Pourquoi le calcul n'en a-t-il donné qu'une des deux ? Quand $t \approx 0$, $u(t) \approx (t, 2t)$ et donc on parcourt la branche montante. La branche descendante est parcourue pour $t \approx \pi$. Donc l'autre tangente est celle pour $t = \pi$.



Question 11. *Prouvez par récurrence que*

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 \qquad \text{pour } n \geqslant 3. \tag{5}$$

Si $n = 3$, le premier membre et le second membre valent tous deux 36. C'est donc prouvé.

Supposons que l'égalité (5) soit prouvée pour tout $n \leqslant k$ (hypothèse de récurrence) ; prouvons que cela implique que l'égalité (5) est vérifiée avec $n = k+1$. Le premier membre est $\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3$. Par hypothèse de récurrence, on a $\sum_{i=1}^{k} i^3 = (\sum_{i=1}^{k} i)^2$. Le second membre de (5) pour $n = k+1$ est

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1} i\right)^2 = \left(\left(\sum_{i=1}^{k} i\right) + (k+1)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} i\right)^2 + (k+1)^2 + 2(k+1)\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)$$

Question 11 (suite).

Vu l'hypothèse de récurrence, prouver l'égalité des deux membres de (5) dans le cas $n = k + 1$ revient à

$$(k+1)^3 = (k+1)^2 + 2(k+1)\Big(\sum_{i=1}^{k} i\Big) \tag{6}$$

Développons le second membre de (6) : on a

$$(k+1)^2 + 2(k+1)\Big(\frac{k(k+1)}{2}\Big) = (k+1)^2(1+k) = (1+k)^3$$

ce qui conclut la preuve.

Question 12. *Calculez,*

- *pour* $t \geqslant -3$ *:* $\displaystyle\sum_{j=-3}^{t} \pi$
- *pour* $n \geqslant 0$ *:* $\displaystyle\sum_{t=0}^{n} (2t - t^2\boldsymbol{i})$
- *pour* $n \geqslant 2$ *:* $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} k(ij)(i-j)$

$$\sum_{j=-3}^{t} \pi = \pi \sum_{j=-3}^{t} 1 = \pi(t+4)$$

$$\sum_{t=0}^{n} (2t - t^2\boldsymbol{i}) = 2\sum_{t=0}^{n} t - \boldsymbol{i}\sum_{t=0}^{n} t^2$$
$$= 2\frac{n(n+1)}{2} - \boldsymbol{i}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} k(ij)(i-j) = 0$ car on fait la somme de tous les éléments d'une matrice carrée qui est anti-symétrique : $k(ij)(i-j) = -k(ji)(j-i)$.

Question 13. *Justifiez brièvement toutes vos réponses.*

- *Calculez* $(1+2\boldsymbol{i})(4+3\boldsymbol{i})$, $(1+2\boldsymbol{i})-(4+3\boldsymbol{i})$.
- *Calculez le module de* $\dfrac{(1+2\boldsymbol{i})^2}{(4+3\boldsymbol{i})^3}$.

$$(1+2\boldsymbol{i})(4+3\boldsymbol{i}) = 1\cdot 4+2\boldsymbol{i}\cdot 3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{i}\cdot 4+1\cdot 3\boldsymbol{i} = -2+11\boldsymbol{i}$$

$$(1+2\boldsymbol{i})-(4+3\boldsymbol{i}) = (1-4)+(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{i}) = -3-\boldsymbol{i}$$

$$\left|\frac{(1+2\boldsymbol{i})^2}{(4+3\boldsymbol{i})^3}\right| = \frac{|1+2\boldsymbol{i}|^2}{|4+3\boldsymbol{i}|^3} = \frac{\left(\sqrt{1^2+2^2}\right)^2}{\left(\sqrt{4^3+3^2}\right)^3} = \frac{5}{(\sqrt{25})^3} = \frac{5}{5^3} = \frac{1}{25}$$

Question 13 (suite).

- *Calculez le module des solutions complexes de l'équation* $z^3 = 8$ *(sans calculer les solutions).*
- *Calculez la forme trigonométrique de* $\frac{3}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- *Calculez les arguments des solutions complexes de l'équation* $z^6 = \sqrt{12736812}$ *(sans calculer les solutions).*

Puisque $|z^3| = |z|^3$, le module des solutions de $z^3 = 8$ est la solution dans $\mathbb{R}_+$ de l'équation $x^3 = 8$, c'est-à-dire 2.

La forme trigonométrique de $\frac{3}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ est $\sqrt{3}\underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \boldsymbol{i}\frac{1}{2}\right)}_{\text{de module } 1} = \sqrt{3}\,\mathrm{cis}(\pi/6)$.

les arguments des solutions complexes de $z^6 = \sqrt{12736812}$ sont les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $6x = 0 \pmod{2\pi}$, c'est-à-dire 0, $\pi/3$, $2\pi/3$, π, $4\pi/3$, $5\pi/3$.

Question 13 (suite).

- *Prouvez que* $\left(\frac{3}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6=-27$.
- *Prouver que les solutions complexes de* $z^6=-27$ *sont les nombres*

$$\left(\frac{3}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\operatorname{cis}\left(k\frac{2\pi}{6}\right) \qquad \textit{avec } k\in\{0,1,2,3,4,5\}.$$

On a vu ci-dessus que $\frac{3}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\operatorname{cis}(\pi/6)$. Donc

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 &= \left(\sqrt{3}\operatorname{cis}(\pi/6)\right)^6\\ &= (\sqrt{3})^6\left(\operatorname{cis}(\pi/6)\right)^6=27\operatorname{cis}\pi=27\cdot(-1)=-27.\end{aligned}$$

Les solutions de $z^6=-27$ sont les z_k avec $k\in\{0,1,\dots,5\}$ définis par :

$$z_k=\sqrt[6]{27}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{cis}\left(k\frac{2\pi}{6}\right)=\left(\frac{3}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\operatorname{cis}\left(k\frac{2\pi}{6}\right).$$

Question 14. *Tout nombre complexe s'écrit $x \cdot 1 + y \cdot \boldsymbol{i}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et on lui associe le couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Soit $z = a + b\boldsymbol{i} \in \mathbb{C}$. L'application*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto \Big(\Re e\big[z(x+y\boldsymbol{i})\big], \Im m\big[z(x+y\boldsymbol{i})\big]\Big).$$

est une application linéaire (ne le vérifiez pas). Calculez la matrice associée à cette application linéaire. Prouvez que le déterminant est $|z|^2$.

Puisque f est linéaire, il suffit de calculer $f(1,0)$ et $f(0,1)$. On a que

$$f(1,0) = \big(\Re e[z \cdot 1], \Im m[z \cdot 1]\big) = (\Re e z, \Im m z) = (a,b)$$
$$f(0,1) = \big(\Re e[z \cdot \boldsymbol{i}], \Im m[z \cdot \boldsymbol{i}]\big) = \big(\Re e[\boldsymbol{i} z], \Im m[\boldsymbol{i} z]\big) = (-b,a)$$

La matrice est donc

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

et son déterminant vaut $a^2 + b^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = |z|^2$.

Question 15. *Décrire le contenu des variables X, Y, A, B, C, D durant l'exécution quand X est initialisé à 12 et Y est initialisé à 8.*

$X \leftarrow x$; $Y \leftarrow y$

$A \leftarrow 1$; $B \leftarrow 0$; $C \leftarrow 0$; $D \leftarrow 1$

Tant que $Y > 0$ *faire*

$$\begin{cases} Q \leftarrow X \operatorname{div} Y \\ R \leftarrow X \operatorname{mod} Y \\ X \leftarrow Y \\ Y \leftarrow R \\ A' \leftarrow A \; ; \; B' \leftarrow B \\ A \leftarrow C \; ; \; B \leftarrow D \\ C \leftarrow A' - CQ \\ D \leftarrow B' - DQ \end{cases}$$

Variables	1 : Initialisation	2	3
X	12	8	4
Y	8	4	0
A	1	0	1
B	0	1	-1
C	0	1	-2
D	1	-1	3
Q		1	2
R		4	0
A'		1	0
B'		0	1
Raison de l'arrêt :			$Y = 0$

Question 15 (suite). *Prouvez que $\langle \ldots \rangle$ est bien l'invariant.*

$X \leftarrow x$; $Y \leftarrow y$

$A \leftarrow 1$; $B \leftarrow 0$; $C \leftarrow 0$; $D \leftarrow 1$

$\langle X = Ax + By \wedge Y = Cx + Dy \rangle$

Tant que $Y > 0$ *faire*

$$\begin{cases} Q \leftarrow X \operatorname{div} Y \\ R \leftarrow X \bmod Y \\ X \leftarrow Y \\ Y \leftarrow R \\ A' \leftarrow A \;;\; B' \leftarrow B \\ A \leftarrow C \;;\; B \leftarrow D \\ C \leftarrow A' - CQ \\ D \leftarrow B' - DQ \\ \langle X = Ax + By \wedge Y = Cx + Dy \rangle \end{cases}$$

Initialisation : $X = x$, $Y = y$, $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 1$, d'où $Ax + By = x = X$ et $Cx + Dy = y = Y$.

Supposons que l'invariant soit satisfait après un certain nombre d'exécutions de la boucle : si on appelle X_{an}, Y_{an}, A_{an}, B_{an}, C_{an}, D_{an} à ce moment, cela signifie qu'on a

$$X_{\text{an}} = A_{\text{an}} x + B_{\text{an}} y, \tag{7}$$

$$Y_{\text{an}} = C_{\text{an}} x + D_{\text{an}} y \tag{8}$$

On exécute une fois de plus la boucle. Il faut montrer que l'assertion reste vraie avec les nouvelles valeurs des variables : X_{nv}, Y_{nv}, A_{nv}, B_{nv}, C_{nv}, D_{nv}.

Question 15 (suite).

En exécutant les instructions d'un tour de boucle, on déduit les égalités

$$\begin{aligned} Q &= X_{\text{an}} \operatorname{div} Y_{\text{an}} \\ R &= X_{\text{an}} \operatorname{mod} Y_{\text{an}} \\ A' &= A_{\text{an}} \\ B' &= B_{\text{an}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} X_{\text{nv}} &= Y_{\text{an}} \\ Y_{\text{nv}} &= R = X_{\text{an}} \operatorname{mod} Y_{\text{an}} \\ A_{\text{nv}} &= C_{\text{an}} \\ B_{\text{nv}} &= D_{\text{an}} \\ C_{\text{nv}} &= A' - C_{\text{an}}Q = A_{\text{an}} - C_{\text{an}}(X_{\text{an}} \operatorname{div} Y_{\text{an}}) \\ D_{\text{nv}} &= B' - D_{\text{an}}Q = B_{\text{an}} - D_{\text{an}}(X_{\text{an}} \operatorname{div} Y_{\text{an}}) \end{aligned}$$

En remplacant dans $X_{\text{nv}} = A_{\text{nv}}x + B_{\text{nv}}y$, on trouve $Y_{\text{an}} = C_{\text{an}}x + D_{\text{an}}y$ et donc cette égalité est satisfaite en vertu de l'hypothèse de récurrence (7). En remplacant dans $Y_{\text{nv}} = C_{\text{nv}}x + D_{\text{nv}}y$ et en utilisant (7)–(8), on trouve

$$\begin{aligned} X_{\text{an}} \operatorname{mod} Y_{\text{an}} &= \big(A_{\text{an}} - C_{\text{an}}(X_{\text{an}} \operatorname{div} Y_{\text{an}})\big)x + \big(B_{\text{an}} - D_{\text{an}}(X_{\text{an}} \operatorname{div} Y_{\text{an}})\big)y \\ &= (A_{\text{an}}x + B_{\text{an}}y) - (C_{\text{an}}x + D_{\text{an}}y)(X_{\text{an}} \operatorname{div} Y_{\text{an}}) \\ &= X_{\text{an}} - Y_{\text{an}}(X_{\text{an}} \operatorname{div} Y_{\text{an}}) \end{aligned}$$

ce qui est vrai par définition de div et mod.