Mathématique Élémentaire

Examen

(7 janvier 2002)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles.
- Les *explications* sont aussi *importantes* que les résultats. Rappelez vous que nous ne voyons pas ce que vous pensez, seulement ce que vous avez écrit.
- Ne confondez pas la *rédaction* de vos réponses avec celle de vos brouillons !
- La grandeur des espaces laissés après les questions vous donne une *indication* sur la *longueur des réponses* attendue. N'employez *pas* le dos de la feuille *précédente* !

Question 1. Prouvez par récurrence que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \binom{n+1}{2} \qquad \text{pour } n \geqslant 1.$$

Mathématique Élémentaire

Examen (7 janvier 2002)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2. Justifiez brièvement vos réponses.

(a) Soient les nombres complexes

$$z_1 = 1 + 3\boldsymbol{i}, \qquad z_2 = -1 - \boldsymbol{i}, \qquad z_3 = \sqrt{3}\boldsymbol{i} - 1.$$

Calculez le module du nombre complexe

$$z = \frac{z_1^2 \cdot z_2^4}{z_3}.$$

(b) Calculez le module des solutions complexes de l'équation $z^5 = -32\boldsymbol{i}$ (sans calculer les solutions).

(c) Calculez les arguments des solutions complexes de l'équation $z^3 = -\boldsymbol{i}$.

(d) Calculez la forme trigonométrique de $1 - \boldsymbol{i}\sqrt{3}$.

(e) Déterminez le plus petit nombre entier positif non-nul tel que $(1 - \boldsymbol{i}\sqrt{3})^n$ soit réel.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Donnez la table de vérité de

$$(A \wedge B) \vee (B \wedge C) \Rightarrow B.$$

Question 4. Niez la phrase : « Si je résous tous les exercices du syllabus, alors je réussirai l'examen de Mathématique Élémentaire. »

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Résolvez graphiquement et algébriquement l'inéquation suivante :

$$x^3 - x \leqslant |x|$$

(Veuillez faire un graphe aussi soigné que possible et expliquez les points essentiels de votre construction.)

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. Calculez

- pour $v \geqslant 5$: $\sum_{k=-5}^{v} \sqrt{3}$
- $\sum_{i=-2}^{n^2} (i+1)$
- pour $n \geqslant 1$: $\sum_{\ell=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} (\ell^3 - p^3)\ell^2 p^2$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7. Soient D la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation paramétrique

$$(x, y) = (1, -3) + \lambda(-2, 5), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

et la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (2x - y, 2y - x).$$

(a) Montrez que la fonction f est une application linéaire.

(b) Prouvez que l'image de D par f est encore une droite. On la notera D'.

(c) Écrivez une équation cartésienne de D'.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 7 (suite). Continuez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. Dans $\mathbb{R}^3$, considérons les trois vecteurs de la base canonique

$$\overrightarrow{e_1} = (1,0,0), \qquad \overrightarrow{e_2} = (0,1,0), \qquad \overrightarrow{e_3} = (0,0,1)$$

et f l'application linéaire qui, aux vecteurs $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$, fait respectivement correspondre les vecteurs $\overrightarrow{b_1}$, $\overrightarrow{b_2}$, $\overrightarrow{b_3}$, définis par $\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{b_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{b_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$. Écrivez la matrice associée à f.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^{x+0{,}05x^2} - 1{,}1 \cos(x)$.

- Calculez $\partial_x f(x)$ et $\partial_x^2 f(x)$.

- Calculez l'équation cartésienne de la droite D_0 tangente au graphe de f en $x = 0$.

- En quel point la droite D_0 intersecte-t-elle l'axe des x ?

- On définit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(0) + \partial_x f(0)x + \frac{1}{2}\partial_x^2 f(0)x^2$. Quelles sont les racines de cette fonction ? (Outre le raisonnement, une réponse numérique est demandée.)

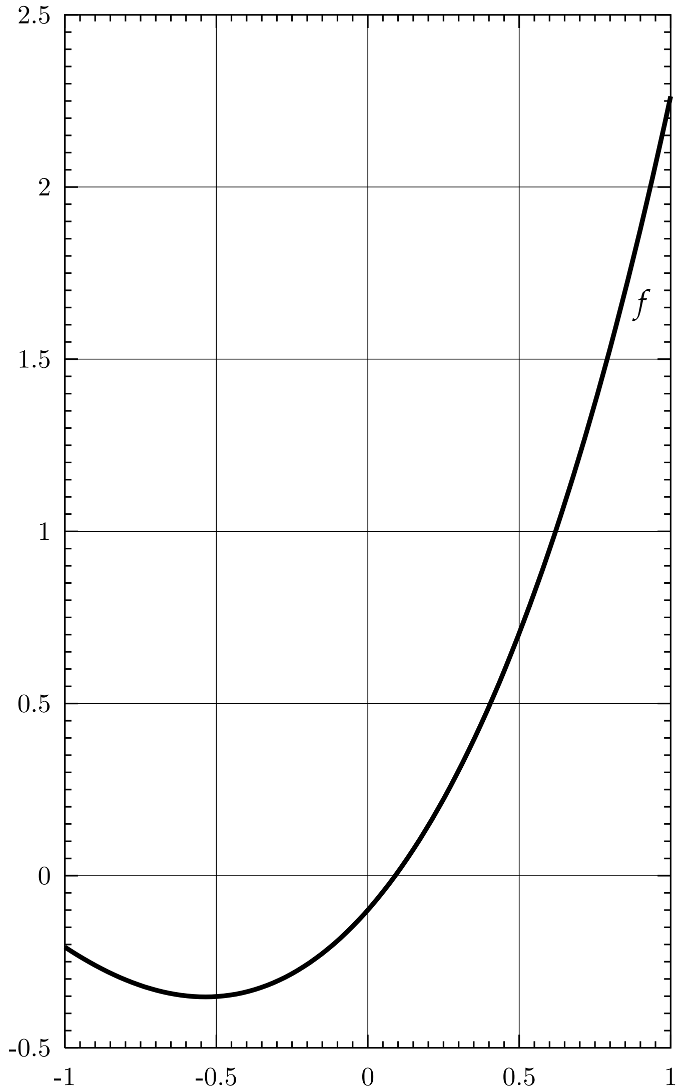
Nom :

Prénom :

Section :

Question 9 (suite).

- Sur le graphique ci-contre, on a représenté la fonction f sur l'intervalle $[-1, 1]$. Veuillez tracer sur ce même dessin la droite D_0 et le graphe de la fonction g. Ceci doit vous permettre de voir que l'équation de D_0 que vous avez calculée est essentiellement correcte. Pourquoi ?



- **(Bonus)** Utilisez les résultats ci-dessus pour donner une approximation de l'unique racine positive x^* de f. Justifiez.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 10. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x - 2y$. On considère le système de contraintes

$$\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ x + 2y \leqslant 2 \\ y \leqslant \alpha x \end{cases} \tag{1}$$

où $\alpha \in \,]-\infty, 0[$. On est intéressé à minimiser f sur l'ensemble des (x, y) qui satisfont (1). Pour quelle(s) valeur(s) de α le minimum est-il atteint au point $(-2, 2)$? Expliquez.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11.

(a) Calculez, si possible, l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) Résolvez le système

$$\begin{cases} -3x + 2y = 19 \\ -2x + 4y - 2z = 0 \\ x - y + 5z = -38 \end{cases}$$

L'efficacité de la méthode utilisée est importante.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 11 (suite). Continuez votre réponse sur cette page si nécessaire.