Mathématique Élémentaire

Examen

(5 juin 2002)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres MAJUSCULES votre nom, prénom et section sur *toutes* les feuilles.
- Les *explications* sont aussi *importantes* que les résultats. Rappelez vous que nous ne voyons pas ce que vous pensez, seulement ce que vous avez écrit.
- Ne confondez pas la *rédaction* de vos réponses avec celle de vos brouillons !
- La grandeur des espaces laissés après les questions vous donne une *indication* sur la *longueur des réponses* attendue. N'employez *pas* le dos de la feuille *précédente* !

Question 1. Calculez

- pour $k \geqslant 0$: $\sum_{s=-4}^{k} (s-1)$

- pour $t \geqslant 3$: $\sum_{k=-3}^{t} \sqrt{7}$

- pour $n \geqslant 1$: $\sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} (t^3 - s^3)(t^4 + s^4)$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2.

(a) Calculez, si possible, l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) Résolvez le système

$$\begin{cases} -3x + 2y = 19 \\ -2x + 4y - 2z = 0 \\ x - y + 5z = -38 \end{cases}$$

L'efficacité de la méthode utilisée est importante.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 2 (suite). Continuez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Donnez la table de vérité de

$$\big(A \wedge (A \Rightarrow B)\big) \Leftrightarrow (A \vee B).$$

Donnez une expression équivalente plus simple. Justifiez.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x - 2y$. On considère le système de contraintes

$$\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ x + 2y \leqslant 2 \\ y \leqslant \alpha x \end{cases} \tag{1}$$

où $\alpha \in \left]-\infty, 0\right[$. On est intéressé à minimiser f sur l'ensemble des (x, y) qui satisfont (1). Pour quelle(s) valeur(s) de α le minimum est-il atteint au point $(-2, 2)$? Expliquez.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 5.

- Montrez par un raisonnement algébrique *et* par un raisonnement géométrique, que, quels que soient les nombres $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, l'équation $ax^2 - bx - 5 = 0$ possède deux racines distinctes de signes opposés.

- Biffez un élément dans chacune des trois colonnes de manière à rendre l'équivalence suivante vraie :

$$|x| > a \iff \begin{array}{|c|}\hline x > a \\ \hline x < a \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline \text{et} \\ \hline \text{ou} \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline x > -a \\ \hline x < -a \\ \hline\end{array}. \tag{2}$$

  À partir de la définition de valeur absolue, prouvez l'implication « $\Leftarrow$ » de (2).

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 6. Justifiez brièvement vos réponses.

(a) Soient les nombres complexes

$$z_1 = 1 + 3\boldsymbol{i}, \qquad z_2 = -1 - \boldsymbol{i}, \qquad z_3 = \sqrt{3}\boldsymbol{i} - 1.$$

Calculez le module du nombre complexe

$$z = \frac{z_1^2 \cdot z_2^4}{z_3}.$$

(b) Calculez les arguments des solutions complexes de l'équation $z^3 = -\boldsymbol{i}$.

(c) Calculez le module des solutions complexes de l'équation $z^5 = -32\boldsymbol{i}$ (sans calculer les solutions).

(d) Calculez la forme trigonométrique de $1 - \boldsymbol{i}\sqrt{3}$.

(e) Déterminez le plus petit nombre entier positif non-nul tel que $(1 - \boldsymbol{i}\sqrt{3})^n$ soit réel.

Nom :

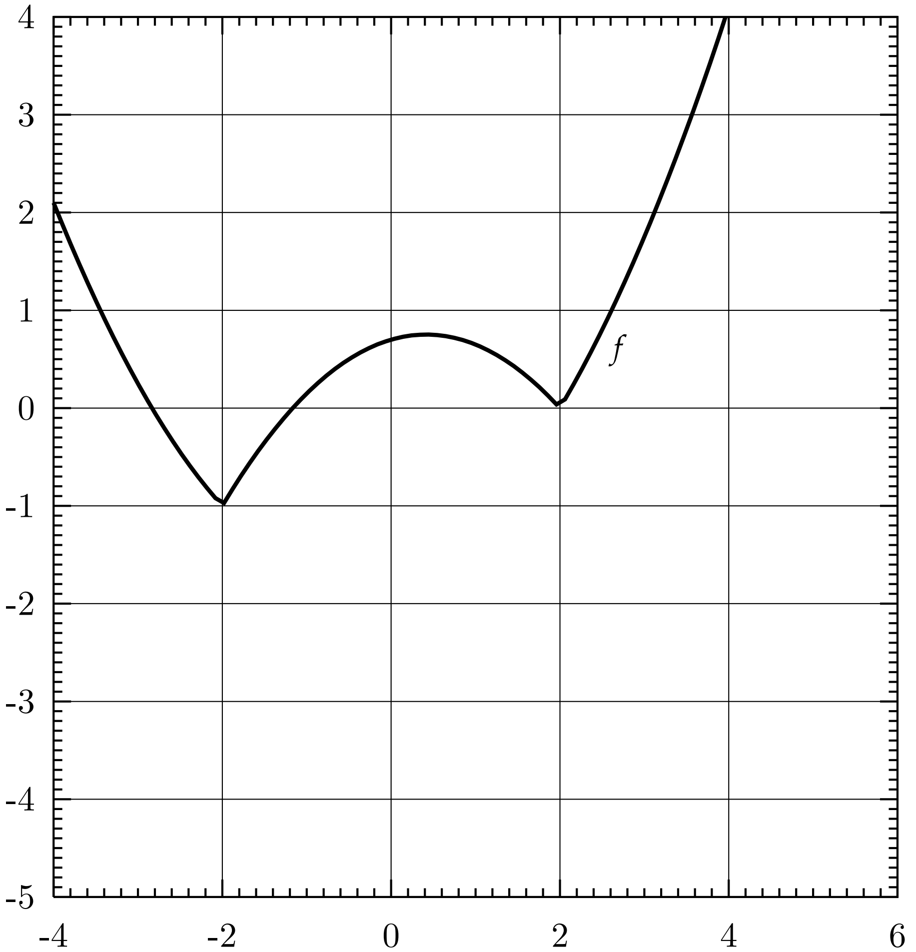
Prénom :

Section :

Question 7. Soit $f : [-4,4] \to \mathbb{R}$ une fonction dont le graphe est représenté ci-dessous. Sur ce même dessin, tracez le graphe des fonctions

- $g : [-2,6] \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x-2)$
- $h : [-4,4] \to \mathbb{R} : x \mapsto -f(-x)-1$

Expliquez votre manière de procéder.



Nom :
Prénom :
Section :

Question 8. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Supposons que $A^2 + A = 2 \cdot \mathbb{1}$.

- Montrez que $a + d = -1$ et $ad - bc = -2$.

- Donnez A^{-1} (si elle existe).

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9. Soit la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big) = \Big(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\Big).$$

- Calculez $\partial_x f(x,y)$, $\partial_y f(x,y)$, $\partial_x^2 f(x,y)$ et $\partial_y^2 f(x,y)$.

- Est-il vrai que f est une solution de l'équation

$$\partial_x^2 f(x,y) + \partial_y^2 f(x,y) = 0 \quad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\,?$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. Prouvez par récurrence que, pour tout $n \geqslant 4$,

$$n! > 2^n.$$

Question 11. Niez la phrase « Je réussirai mon année si et seulement si l'équipe belge gagne la coupe du monde de football. »