Mathématique Élémentaire

Examen (21 août 2002)

Nom :
Prénom :
Section :

Lisez ces quelques consignes avant de commencer l'examen.

- Veuillez commencer par écrire en lettres majuscules votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.
- Les *explications* sont aussi *importantes* que les résultats. Rappelez vous que nous ne voyons pas ce que vous pensez, seulement ce que vous avez écrit.
- Ne confondez pas la *rédaction* de vos réponses avec celle de vos brouillons !
- La grandeur des espaces laissés après les questions vous donne une *indication* sur la *longueur des réponses* attendue. N'employez *pas* le dos de la feuille *précédente* !

Question 1. Soient A et B deux matrices de type $p \times p$ dont le déterminant est non-nul.

- Prouvez que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Sous quelle(s) condition(s) a-t-on $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

Justifiez votre réponse.

Mathématique Élémentaire

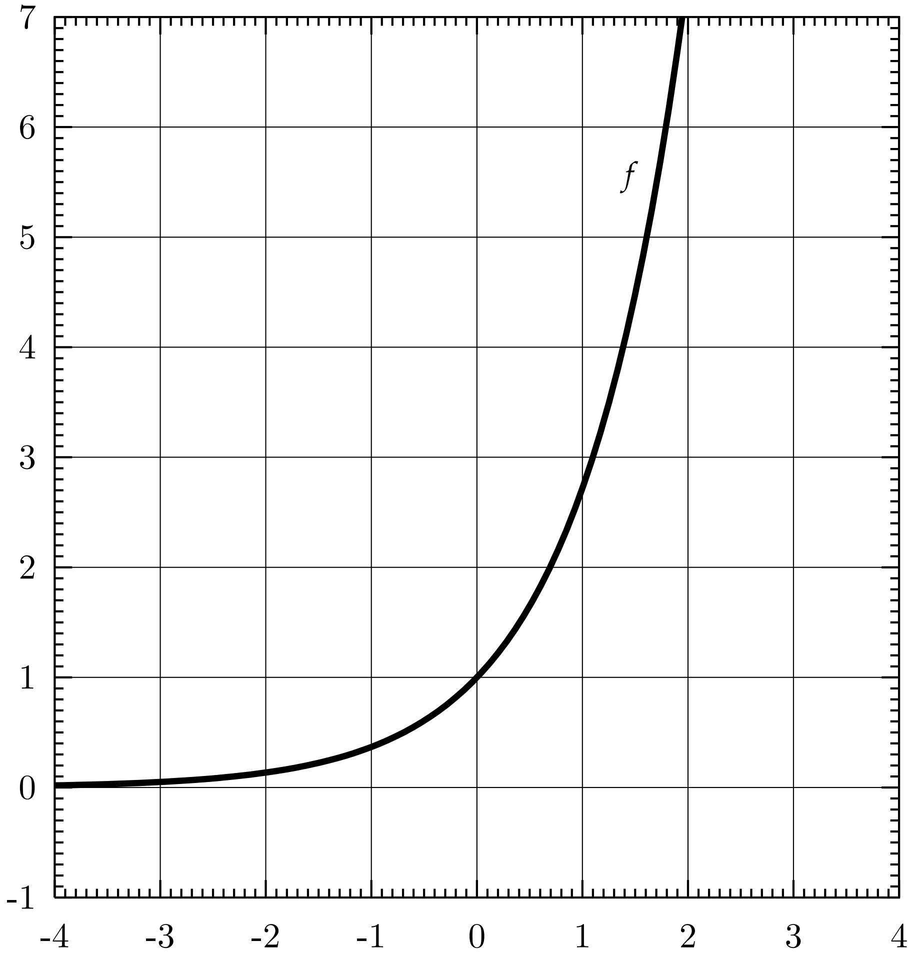
Examen (21 août 2002)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^x$. Donnez l'équation cartésienne de la tangente T au graphe de f au point $\big(0, f(0)\big)$. Tracez la droite T sur le graphe ci-dessous.



Nom :
Prénom :
Section :

Question 3. Soient $M_1, \ldots, M_n$ des matrices inversibles de type $p \times p$. Prouvez par récurrence

$$(M_1 \cdot M_2 \cdots M_n)^{-1} = M_n^{-1} \cdots M_2^{-1} \cdot M_1^{-1}.$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Calculez les sommes suivantes :

- $\sum_{k=-3}^{a} \sqrt{5} =$

- $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} j =$

Question 5. On sait que $\sqrt{14} \notin \mathbb{Q}$ (ne le démontrez pas). Prouvez par l'absurde que $\sqrt{2} + \sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 6. La proposition suivante est-elle une tautologie :

$$\big(A \wedge (B \vee C)\big) \Leftrightarrow \big((A \wedge B) \vee (A \wedge C)\big) \;?$$

Question 7. Niez la phrase : « S'il fait beau demain, j'irai à la plage ».

Mathématique Élémentaire

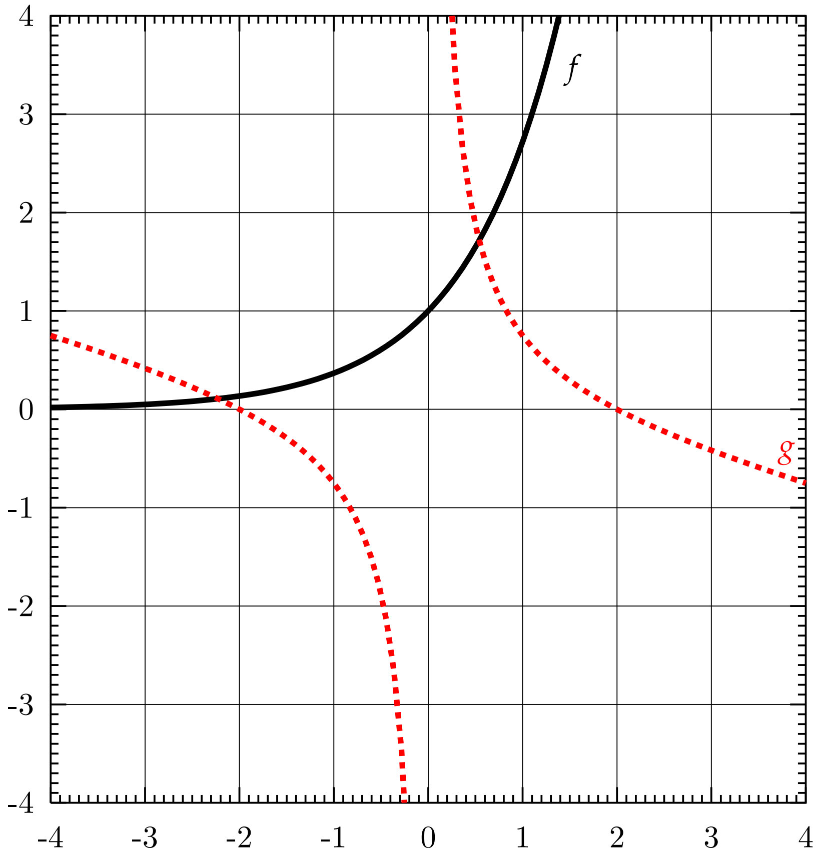
Examen (21 août 2002)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. Soient les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dont les graphes sont représentés sur la figure ci-contre. Sur ce même dessin, veuillez tracer le graphe de $f + g$. Expliquez votre démarche. (Le calcul de valeurs en certains points n'est pas une justification suffisante.)



Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Soit f l'application linéaire telle que

$$f(1,0,0) = (1,-2,0), \quad f(0,1,0) = (-1,1,1), \quad f(0,0,1) = (1,0,0).$$

- Écrivez la matrice associée à f.
- On dit que $x \in \mathbb{R}^3$ est invariant par f si $f(x) = x$. Déterminez les vecteurs invariants.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 9 (suite). Continuez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Nom :
Prénom :
Section :

Question 10. Calculez, si possible, l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Résolvez le système

$$\begin{cases} x + 2y = z + 1 \\ 2x + 4z = 2 - 2y \\ 3z = x + 3y \end{cases}$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 10 (suite). Continuez votre réponse sur cette page si nécessaire.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 11.

- Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^4 = \boldsymbol{i}$.
- Représentez graphiquement les solutions.
- Calculez le produit de ces solutions.

Justifiez toutes vos réponses.

Nom :

Prénom :

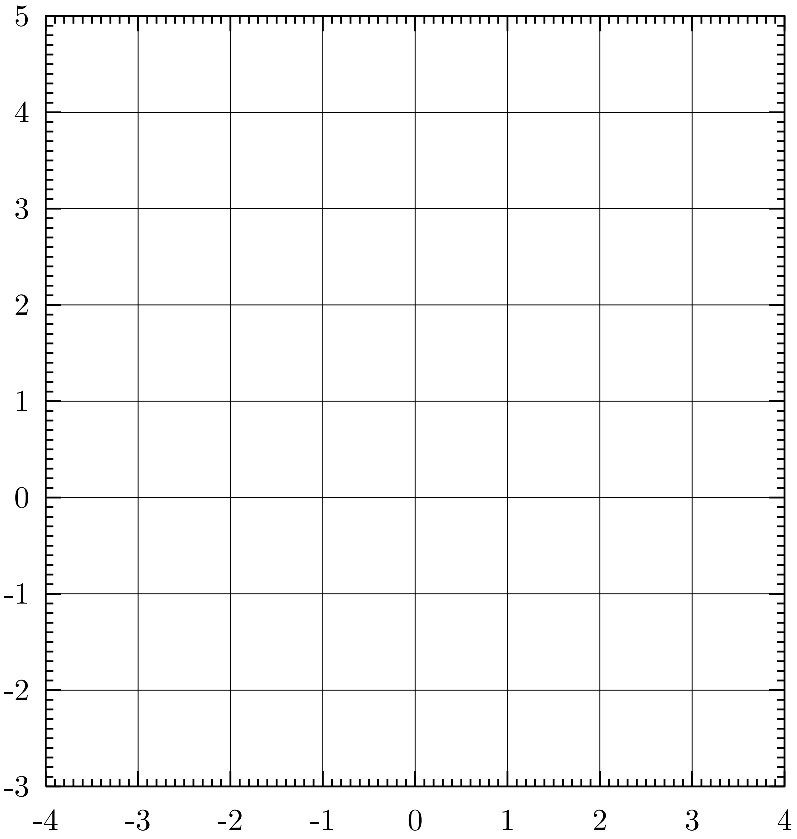
Section :

Question 12. Résolvez de manière graphique *et* algébrique l'inéquation

$$e^x \leqslant 1 + x - |x|.$$

Indication : Pour la résolution algébrique, vous pouvez utiliser le fait que $e^x \geqslant 1 + x$.

RÉSOLUTION GRAPHIQUE :



RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE :

Nom :

Prénom :

Section :

Question 13. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) = -3x - 2y$. On considère le système de contraintes

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ x + y \leqslant 2 \\ y \geqslant \gamma x \end{cases} \tag{1}$$

où $\gamma \in]0, +\infty[$. On est intéressé à minimiser la fonction f sur l'ensemble des (x, y) qui satisfont (1). Pour quelle(s) valeur(s) de γ le minimum est-il atteint au point $(1, 1)$?

Nom :
Prénom :
Section :

Question 13 (suite). Continuez votre réponse sur cette page si nécessaire.