Question 1. *Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :*

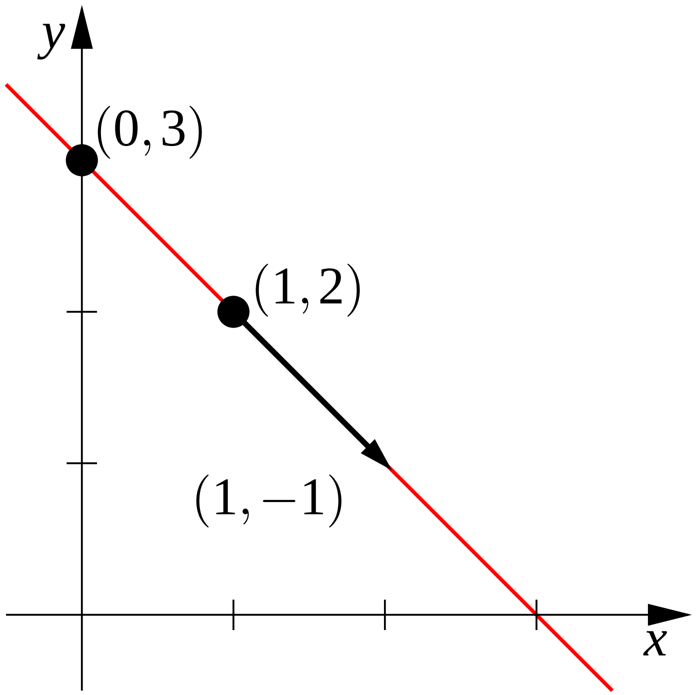
- $x^2 - 3x - 4 = 0$
- $x^2 = -7$

Pour $x^2 - 3x - 4 = 0$, calculons le discriminant $\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-4) = 25$, d'où on déduit qu'il y a deux racines valant

$$x_1 = \frac{3+5}{2} = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3-5}{2} = -1.$$

Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geqslant 0$, l'équation $x^2 = -7$ n'a pas de solutions réelles.

Question 2. *La droite d'équation paramétrique* $(x,y) = (1,2) + \lambda(1,-1)$*,* $\lambda \in \mathbb{R}$*, est-elle le graphe d'une fonction* $f(x) = ax + b$*? Si oui, pour quels* a *et* b*?*



On voit *graphiquement* que c'est le graphe d'une fonction affine (la droite n'est pas verticale). On a que

- la droite coupe l'axe de y en $(0,3)$ (prendre $\lambda = -1$) et
- sa pente est -1 (c'est le rapport ordonnée sur abscisse des coordonnées du vecteur directeur).

Donc $f(x) = -x + 3$.

Question 2 (suite). *La droite d'équation paramétrique* $(x,y) = (1,2) + \lambda(1,-1)$*,* $\lambda \in \mathbb{R}$*, est-elle le graphe d'une fonction* $f(x) = ax+b$*? Si oui, pour quels* a *et* b*?*

Algébriquement, l'équation s'écrit

$$\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2-\lambda \end{cases} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{cases} \lambda = x-1 \\ \lambda = 2-y \end{cases}$$

donc, en éliminant λ, on trouve $x-1 = 2-y$ ou encore

$$f(x) = y = -x+3.$$

Question 3. *Calculez les solutions dans $\mathbb{C}$ des équations suivantes :*

- $x^2 = -7$
- $x^2 - x + 2 = 0$

- $x^2 = 7 \cdot (-1)$ d'où on tire que les solutions sont $x_1 = \sqrt{7}\boldsymbol{i}$ et $x_2 = -\sqrt{7}\boldsymbol{i}$.
- Le discriminant $\Delta = 1 - 4 \cdot 2 = -7$ a pour racines $\pm \boldsymbol{i}\sqrt{7}$, ce qui donne les solutions

$$x_1 = \frac{1 + \boldsymbol{i}\sqrt{7}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1 - \boldsymbol{i}\sqrt{7}}{2}.$$

Question 4. *Vérifiez que* $-\frac{\sqrt{10}}{2}$ *est solution de l'équation*

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=0.$$

Il faut vérifier que :

$$\frac{1}{-\sqrt{10}/2-1}+\frac{1}{-\sqrt{10}/2-2}+\frac{1}{-\sqrt{10}/2+1}+\frac{1}{-\sqrt{10}/2+2}=0.$$

De manière à calculer aussi vite que possible, regroupons les termes du type $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{2x}{x^2-a^2}$, ce qui donne :

$$\frac{-\sqrt{10}}{5/2-1}+\frac{-\sqrt{10}}{5/2-4}=-\sqrt{10}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{-3}\right)=0.$$

Question 5. *Posons*

$$f_a(x) = x^2 + (a^3 - 1)x + a^2 - a.$$

Quelles sont toutes les valeurs de a pour lesquelles l'équation $f_a(x) = 0$ possède deux solutions x_1 et x_2 telles que $x_1 < 0 < x_2$.

Le graphe de f_a est une parabole « tournée vers le haut » (le coefficient de x^2 est > 0). On constate graphiquement que l'équation $f_a(x) = 0$ a deux solutions de signes opposés *si et seulement si* $f_a(0) < 0$ (voir page suivante). Cela revient à dire $a^2 - a < 0$ ou encore $a \in]0, 1[$.

a		0		1	
a	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$a-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$a^2 - a$	$+$	0	$-$	0	$+$

Justification de :

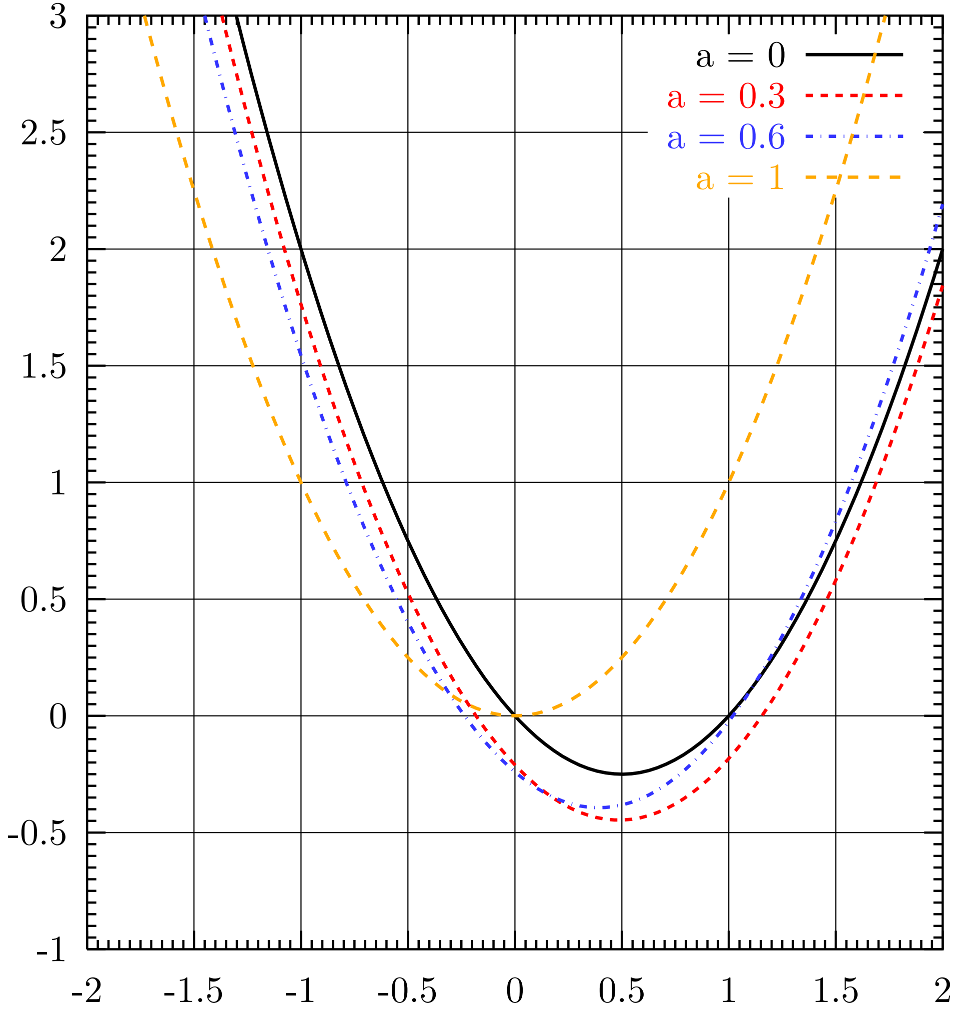
L'équation $f_a(x) = 0$ *a deux solutions de signes opposés* $\iff f_a(0) < 0$

($\Rightarrow$) Si $x_1 < 0 < x_2$, alors $f_a(0) < 0$ puisque la parabole est « tournée vers le haut ».

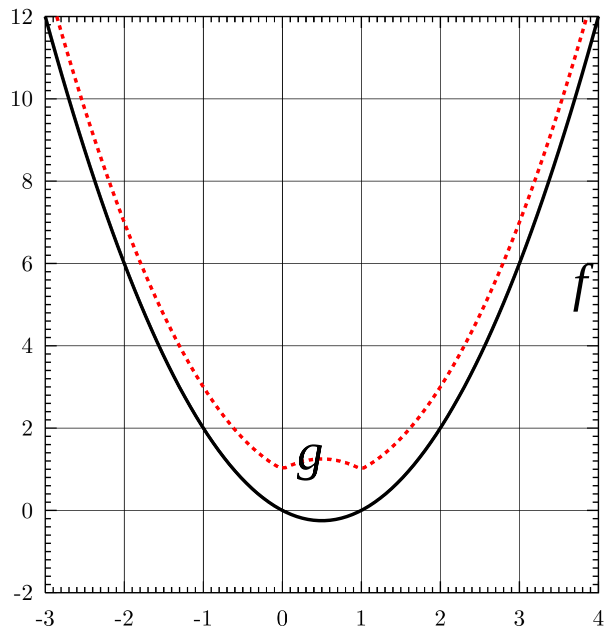
($\Leftarrow$) Si $f_a(0) < 0$, alors la parabole possède deux racines (car elle est « tournée vers le haut ») et ces deux racines sont nécessairement de part et d'autre de 0.

(Tracez les graphes.)

Question 5 (suite). *Posons* $f_a(x) = x^2 + (a^3 - 1)x + a^2 - a$ ...



Question 6. *Ci-après on a tracé le graphe de la fonction $f(x) = x^2 - x$. En vous aidant de ce graphe, tracez celui de $g(x) = |x^2 - x| + 1$. Expliquez et justifiez votre démarche.*



Tout d'abord, on trace $|x^2 - x| = |f(x)|$. Pour cela, on regarde le signe de f :

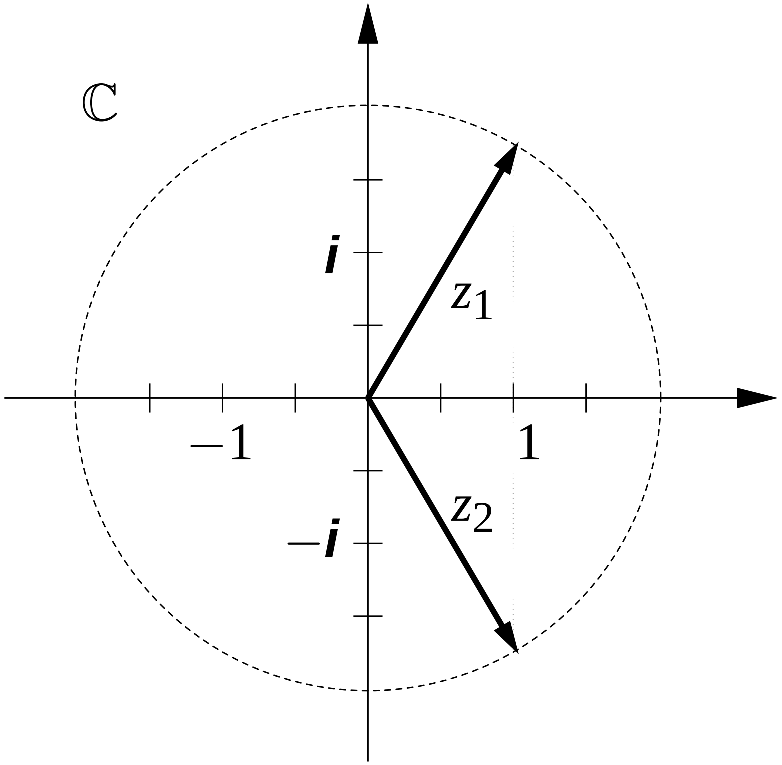
- si $f(x) \geqslant 0$, $|f(x)| = f(x)$, la valeur est inchangée ;
- si $f(x) \leqslant 0$, $|f(x)| = -f(x)$, le graphe de $|f(x)|$ est le symétrique de $f(x)$ par rapport à l'axe des x.

Ensuite $g(x) = |f(x)| + 1$, c'est-à-dire qu'on ajoute 1 à toutes les valeurs de $f(x)$, ce qui revient à translater le graphe de $|f|$ d'une unité vers le haut.

Question 7. *Représenter dans le plan les nombres complexes*

$$z_1 = 2\Big(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\Big) \quad \textit{et} \quad z_2 = 2\Big(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\Big).$$

Calculez la somme et le produit de ces deux nombres complexes ainsi que leurs modules et leurs inverses (s'il existent).

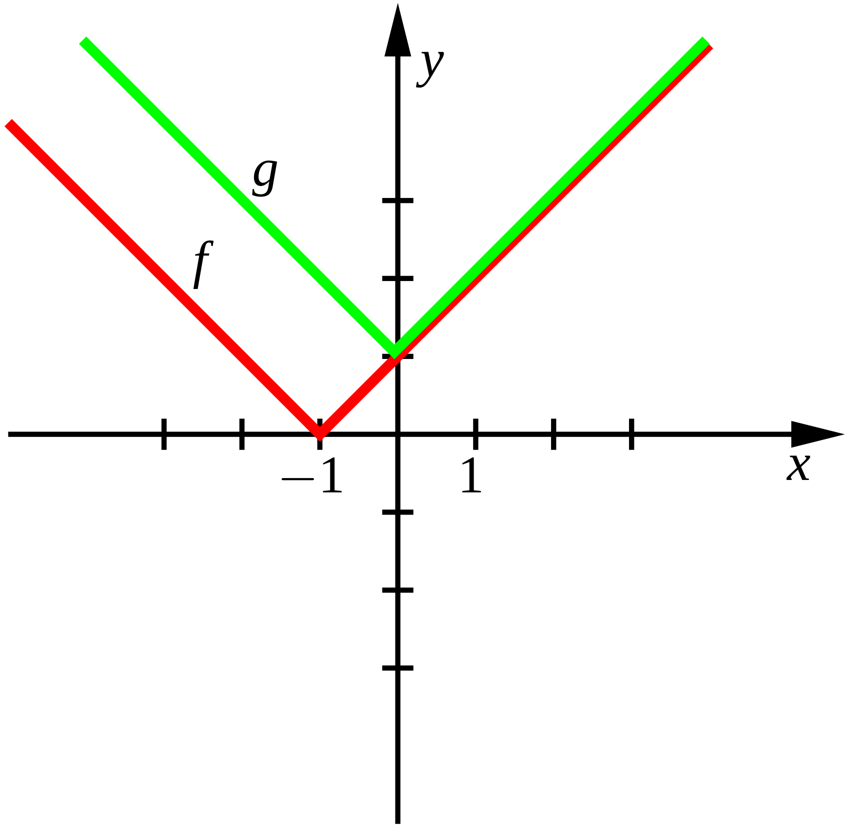


On constate que $|z_1| = |z_2| = 2$ et que de plus $z_1 = \overline{z_2}$. On a donc $z_1 + z_2 = 2\Re e(z_1) = 2\Re e(z_2) = 2$ et $z_1 z_2 = |z_1|^2 = |z_2|^2 = 4$. On en déduit que $z_1^{-1} = z_2/4$, $z_2^{-1} = z_1/4$ et que z_1^{-1} et z_2^{-1} ont pour module $1/2$.

Question 8. *Montrez graphiquement que*

$$\textit{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad |x+1| \leqslant |x|+1.$$

Pour quelles valeurs de x a-t-on l'égalité ?



Posons $f(x) = |x+1|$ et $g(x) = |x|+1$. Les graphes de f et g sont représentés ci-contre. Le fait que le graphe de f soit toujours en dessous de celui de g signifie que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout x. L'équation $f(x) = g(x)$ a pour solutions $x \in [0, +\infty[$ puisque ce sont toutes les valeurs de x pour lesquelles les deux graphes coïncident.

Question 8 (suite). *Démontrez algébriquement l'inégalité ci-dessus.*

L'approche la plus naïve est sans doute de distinguer tous les cas en utilisant les définitions :

$$\lvert x+1\rvert = \begin{cases} x+1 & \text{si } x+1 \geqslant 0 \\ -x-1 & \text{si } x+1 < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lvert x\rvert = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

On obtient le tableau :

x		-1		0	
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$x+1$			
$\lvert x\rvert+1$	$-x+1$			$x+1$	
$\lvert x+1\rvert \leqslant \lvert x\rvert+1$	$-x-1 \leqslant -x+1$	$x+1 \leqslant -x+1$		$x+1 \leqslant x+1$	
càd.	$-1 \leqslant +1$	$x \leqslant 0$		$0 \leqslant 0$	

dont la dernière ligne est composée de propositions vraies.

Question 8 (suite). *Démontrez algébriquement l'inégalité ci-dessus.*

On peut cependant aller beaucoup plus vite en se rappelant que

$$|\xi| \leqslant a \iff -a \leqslant \xi \leqslant a.$$

En particulier, on en déduit (appliqué à $|x| \leqslant |x|$) que $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$. Donc

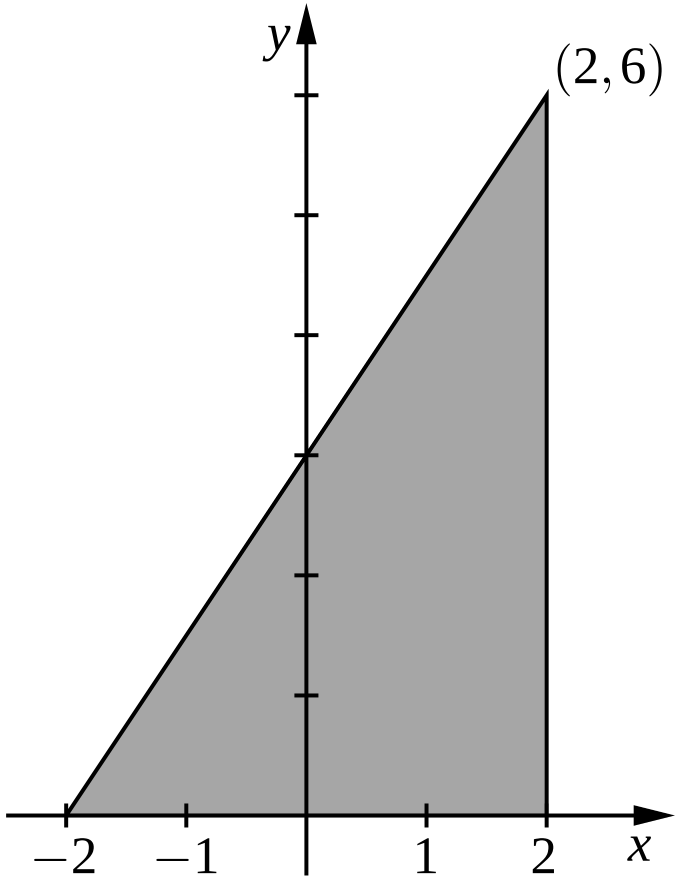
$$-(|x|+1) = -|x| - 1 \leqslant -|x| + 1 \leqslant x + 1 \leqslant |x| + 1$$

ce qui est équivalent à $|x+1| \leqslant |x| + 1$.

Question 9. *Soit* $\alpha \in [0,1]$*. On cherche à minimiser la fonction* $f(x,y) = 2x + \alpha y$ *sous les contraintes*

$$\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ y \geqslant 0 \\ 2y - 6 \leqslant 3x \end{cases}$$

Donnez la valeur du minimum en fonction de α*.*



L'ensemble déterminé par les contraintes est représenté ci-contre.

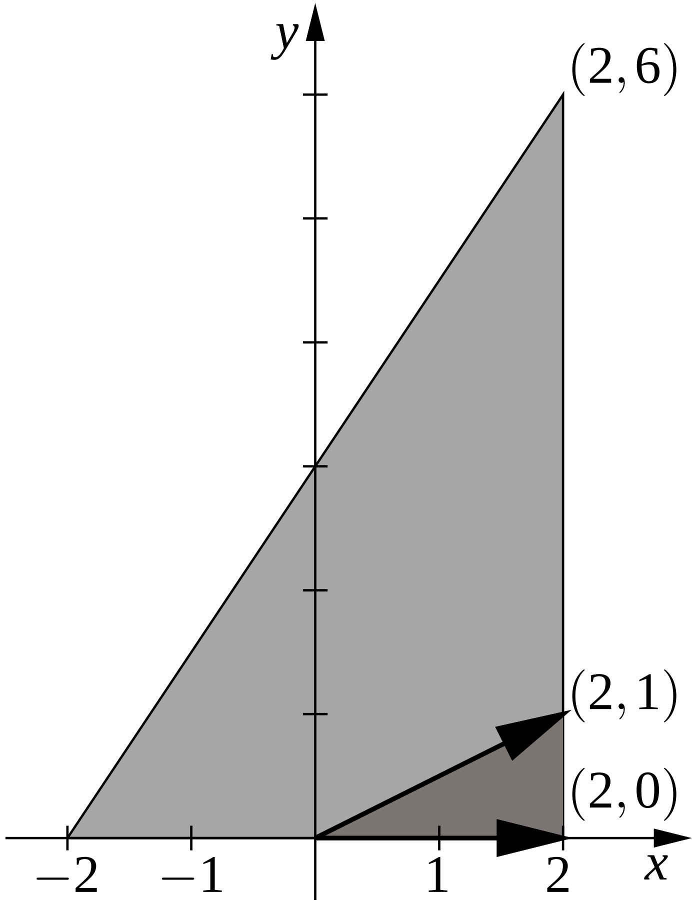
Cherchons la valeur du minimum pour des valeurs particulières de α. Si $\alpha = 0$, alors on cherche à minimiser la fonction

$$f(x,y) = 2x.$$

Considérons le faisceau de droites d'équations $2x = c$ dont les gradients sont $(2,0)$. En balayant le polygone avec les droites du faisceau dans le sens opposé au vecteur $(2,0)$, on voit que le minimum est atteint au dernier sommet rencontré, càd en $(-2,0)$. Ce minimum vaut $f(-2,0) = -4$.

Si $\alpha = 1$, alors on cherche à minimiser la fonction

$$f(x,y) = 2x + y$$



Considérons cette fois le faisceau de droites d'équations $2x + y = c$ dont le gradient est $(2,1)$. Puisque $(2,1)$ est un vecteur du premier quadrant, on balaie le polygone dans le sens opposé au gradient pour trouver le minimum. Celui-ci est atteint au dernier sommet rencontré, càd encore $(-2,0)$. Il vaut $f(-2,0) = -4$.

Si $\alpha \in]0,1[$, que se passe-t-il ? Les gradients $(2,\alpha)$ avec $\alpha \in]0,1[$ sont compris entre les deux vecteurs $(2,0)$ et $(2,1)$. Le sommet en lequel le min est atteint reste inchangé. C'est $(-2,0)$.

En conclusion, quel que soit $\alpha \in [0,1]$, le minimum est atteint en $(-2,0)$ et vaut $f(-2,0) = -4$.