Question 1. *Calculez* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme on multiplie une matrice 4×1 par une matrice 1×4, le résultat est une matrice 4×4 qui est :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & -2 & -1 \\ 9 & -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Question 2. *Calculez* $(1+\boldsymbol{i})^2$.

Il suffit de développer le carré selon la formule habituelle et de simplifier :

$$(1+\boldsymbol{i})^2 = 1^2 + 2\cdot 1\cdot \boldsymbol{i} + \boldsymbol{i}^2 = 1 + 2\boldsymbol{i} - 1 = 2\boldsymbol{i}.$$

Question 3. *Écrivez une équation cartésienne*

(1) du plan α comprenant le point $(3,-2,4)$ et perpendiculaire à la droite D d'équations $x-2=\dfrac{3-y}{-2}=\frac{1}{3}(z-4)$.

(2) du plan β comprenant le point $(-2,3,4)$ et parallèle au plan OXZ. Justifiez vos calculs.

Un vecteur directeur de D se lit sur ses équations, c'est $(1,2,3)$. Puisque $D\perp\alpha$, ce vecteur doit être perpendiculaire à α d'où il découle que α a pour équation cartésienne $\alpha\equiv x+2y+3z=d$, où il reste à déterminer $d\in\mathbb{R}$. Puisque $(3,-2,4)\in\alpha$, on trouve que $3+2\cdot(-2)+3\cdot4=d$, c'est-à-dire $\alpha\equiv x+2y+3z=11$.

Puisque être parallèle à OXZ est équivalent à être perpendiculaire à $(0,1,0)$, on trouve que $\beta\equiv y=d'$ pour un certain $d'\in\mathbb{R}$. Comme de plus, $(-2,3,4)\in\beta$, on trouve que $\beta\equiv y=3$.

Question 4. *Écrivez un système d'équations cartésiennes de la droite* D *passant par le point* $(-5,2,8)$ *et parallèle à la droite* D' *dont une équation paramétrique est*

$$(x,y,z) = (2-3\lambda, \lambda+1, 5\lambda-4), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vu que $D' \equiv (x,y,z) = (2,1,-4) + \lambda(-3,1,5)$, un vecteur directeur de D' est $(-3,1,5)$. Comme $D \mathbin{//} D'$, $(-3,1,5)$ est aussi un vecteur directeur de D. Étant donné que d'autre part, $(-5,2,8) \in D$, une équation paramétrique de D est $D \equiv (x,y,z) = (-5,2,8) + \mu(-3,1,5)$, $\mu \in \mathbb{R}$, ou encore

$$D \equiv \begin{cases} x = -5-3\mu \\ y = 2+\mu \\ z = 8+5\mu \end{cases} \qquad \text{càd.} \qquad D \equiv \begin{cases} (x+5)/(-3) = \mu \\ y-2 = \mu \\ (z-8)/5 = \mu \end{cases}$$

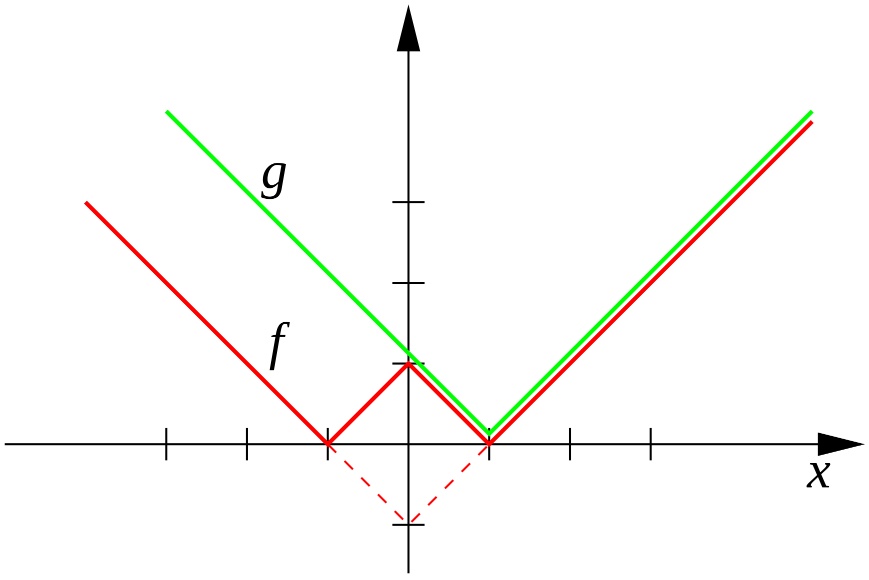
En égalant les différents μ, on trouve les équations cartésiennes de D :

$$D \equiv \frac{x+5}{-3} = y-2 = \frac{z-8}{5}.$$

Question 5. *Démontrez graphiquement* et *algébriquement que*

$$\textit{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad \big||x|-1\big| \leqslant |x-1|.$$

Posons $f(x) = \big||x|-1\big|$ et $g(x) = |x-1|$. La fonction g est facile à tracer : c'est $x \mapsto |x|$ translaté horizontalement d'une unité (vers la droite). Quant à f, il suffit de tracer $x \mapsto |x|-1$ (en pointillés) et d'en prendre la valeur absolue (les parties négatives sont symétrisées orthogonalement par rapport à l'axe OX). Comme, en tout x, $f(x)$ est en dessous de $g(x)$, on a bien $f(x) \leqslant g(x)$ pout tout x — c'est-à-dire la thèse.



Question 5 (suite). *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\big||x|-1\big| \leqslant |x-1|$ (algébriquement).*

Tout d'abord, on a

$$\big||x|-1\big| \leqslant |x-1| \iff -|x-1| \leqslant |x|-1 \text{ et } |x|-1 \leqslant |x-1|.$$

Rappelons nous que nous avions démontré dans le test précédent que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $|\xi+1| \leqslant |\xi|+1$. La deuxième inégalité s'obtient avec $\xi = x-1$. Quant à la première, elle s'écrit : $1 \leqslant |x|+|x-1|$. Détaillons les différents cas :

$$|x|+|x-1| = \begin{cases} \text{si } x \geqslant 1, & x+x-1 = 2x-1 \geqslant 2-1 = 1 \\ \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, & x-(x-1) = 1 \geqslant 1 \\ \text{si } x \leqslant 0, & -x-(x-1) = -2x+1 \geqslant 0+1 = 1 \end{cases}$$

$$\geqslant 1$$

Question 6. *Résolvez, en fonction du réel m, le système suivant :*

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ mx = m(x+y) \end{cases}$$

Interprétez géométriquement vos résultats.

De deux choses l'une :

- soit $m = 0$, auquel cas la deuxième équation est toujours satisfaite et les solutions sont $z = -3x + 2y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ arbitraires (c'est un plan) ;
- soit $m \neq 0$, auquel cas la seconde équation devient, après simplification, $y = 0$ et donc les solutions sont $y = 0$, $z = -3x$ avec $x \in \mathbb{R}$ quelconque (c'est une droite).

Question 7. *Résolvez algébriquement l'inéquation* $|x+1|-1 \leqslant |x^2+x|+x$.

Il suffit d'utiliser à bon escient les deux équivalences concernant $|\xi| \leqslant a$ et $|\xi| \geqslant a$. On a

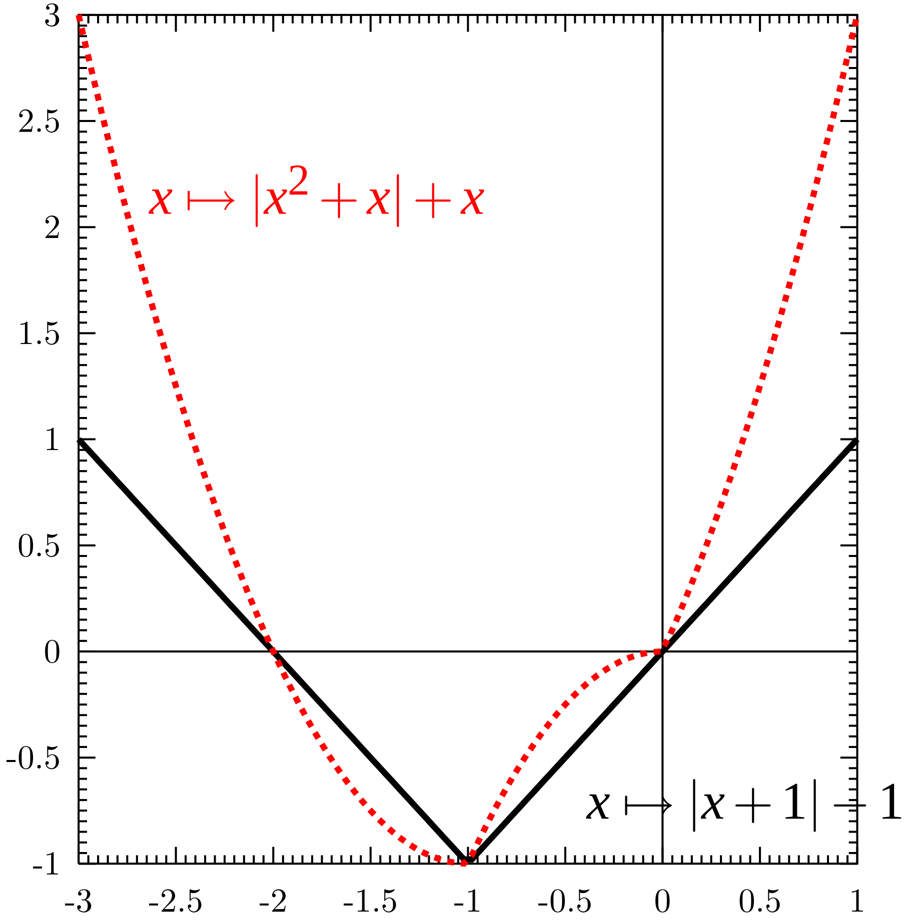
$$\begin{aligned} & |x+1| \leqslant |x^2+x|+x+1 \\ \iff & -(|x^2+x|+x+1) \leqslant x+1 \quad \text{et} \quad x+1 \leqslant |x^2+x|+x+1 \end{aligned}$$

La seconde inégalité revient à $|x^2+x| \geqslant 0$ et est donc toujours vraie. Reste la première, $|x^2+x| \geqslant -2(x+1)$, qu'on décompose à son tour :

$$\begin{aligned} & \iff x^2+x \leqslant 2(x+1) \quad \text{ou} \quad x^2+x \geqslant -2(x+1) \\ & \iff x^2-x-2 \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad x^2+3x+2 \geqslant 0 \\ & \iff -1 \leqslant x \leqslant 2 \quad \text{ou} \quad (x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant -1) \\ & \iff x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant -1 \\ & \iff x \in \,]\leftarrow,-2] \cup [-1,\rightarrow[\end{aligned}$$

Question 7 (suite).

On peut vérifier géométriquement la solution trouvée :



Question 8. *Soit* $ax^2+bx+c=0$*,* $a\neq 0$*,* $a,b,c\in\mathbb{R}$*. Si le discriminant* Δ *de l'équation est strictement négatif, prouvez que les solutions de* $ax^2+bx+c=0$ *sont des complexes conjugués. Calculez leurs parties réelles et leurs parties imaginaires.*

Première solution : C'est un cas particulier de la question 9 (2e point), avec $a_5=a_4=a_3=0$, $a_2=a$, $a_1=b$ et $a_0=c$ car on voit qu'il y a exactement deux solutions différentes non réelles et la question 9 nous dit qu'elles doivent être conjuguées.

Deuxième solution : Les solutions sont

$$z_1=\frac{-b-\boldsymbol{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2=\frac{-b+\boldsymbol{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Dès lors, $\Re e z_1=-b/(2a)=\Re e z_2$ et $\Im m z_1=-\sqrt{|\Delta|}\;/\;(2a)=-\Im m z_2$. Les racines z_1 et z_2 sont donc conjuguées.

Question 9. *Pour tous les $z, z' \in \mathbb{C}$, on a les égalités suivantes :*

(1) $\overline{-z} = -\overline{z}$ *;*

(2) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ *;*

(3) $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$ *;*

(4) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$*.*

- *Prouver uniquement l'égalité numéro 3.*

Supposons $z = a + b\boldsymbol{i}$ et $z' = a' + b'\boldsymbol{i}$ avec $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} zz' &= (aa' - bb') + (ab' + ba')\boldsymbol{i} \\ \text{donc} \quad \overline{zz'} &= (aa' - bb') - (ab' + ba')\boldsymbol{i}. \end{aligned}$$

D'autre part, $\overline{z} = a - b\boldsymbol{i}$ et $\overline{z'} = a' - b'\boldsymbol{i}$, ce qui donne

$$\overline{z} \cdot \overline{z'} = \big(aa' - (-b)(-b')\big) + \big(a(-b') + (-b)a'\big)\boldsymbol{i} = (aa' - bb') - (ab' + ba')\boldsymbol{i}$$

ce qui prouve l'égalité demandée.

Question 9 (suite).

(2) $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$ *;* *(3)* $\overline{z\cdot z'} = \overline{z}\cdot\overline{z'}$ *;* *(4)* $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

- *Soit* a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, $a_5 \in \mathbb{R}$. *Prouver que* si $z \in \mathbb{C}$ *est une solution de* $a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$*,* alors $\overline{z}$ *l'est également.*

Par hypothèse, z est solution, c'est-à-dire $a_5z^5+a_4z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0=0$. En prenant le conjugué de chaque membre, on obtient

$$\overline{a_5z^5+a_4z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0} = \overline{0} = 0.$$

En développant le premier membre grâce à la règle 2, on a $\overline{a_5z^5}+\overline{a_4z^4}+\overline{a_3z^3}+\overline{a_2z^2}+\overline{a_1z}+\overline{a_0}=0$. En appliquant les règles 3 et 4, on obtient $\overline{a_5}\,\overline{z}^5+\overline{a_4}\,\overline{z}^4+\overline{a_3}\,\overline{z}^3+\overline{a_2}\,\overline{z}^2+\overline{a_1}\,\overline{z}+\overline{a_0}=0$. Mais par hypothèse les $a_i \in \mathbb{R}$, donc $\overline{a_i}=a_i$ (vu au cours). Finalement on a que

$$a_5\overline{z}^5+a_4\overline{z}^4+a_3\overline{z}^3+a_2\overline{z}^2+a_1\overline{z}+a_0=0$$

ce qui est précisément la définition du fait que $\overline{z}$ soit solution de $a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$.