

Mathématique Élémentaire

Test n° 4

(8 octobre 2001)

Nom :

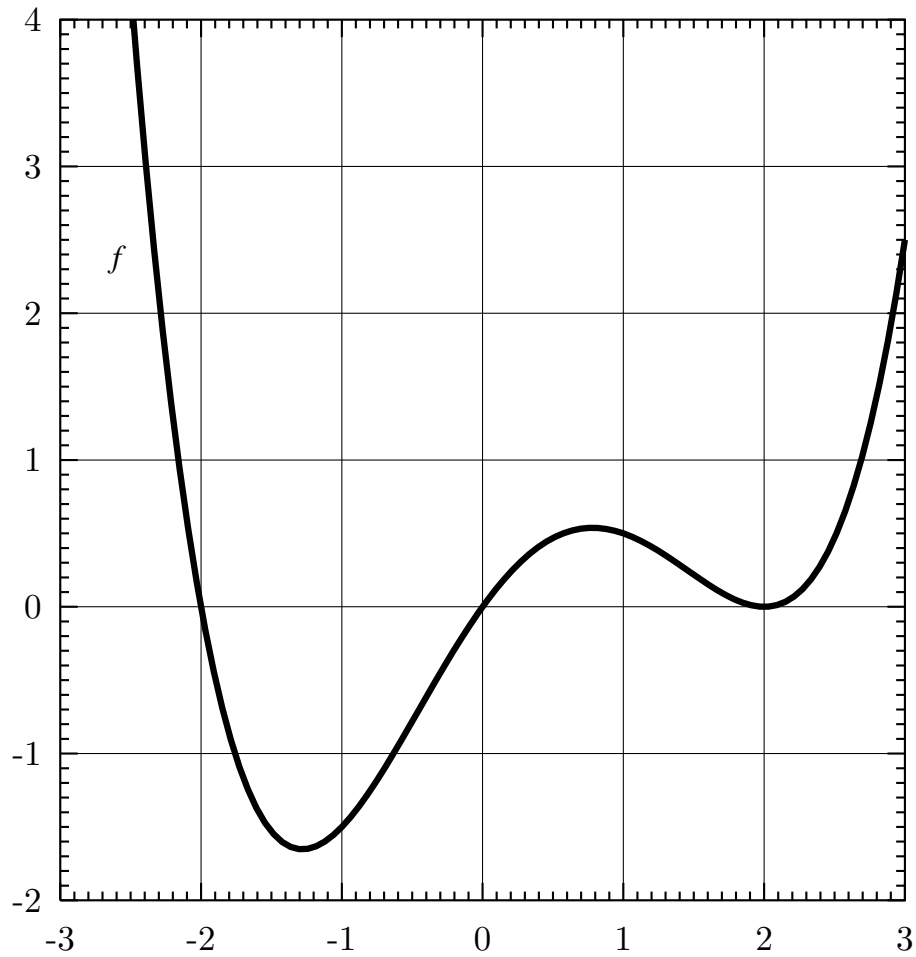
Prénom :

Section :

- Veuillez commencer par écrire en lettres majuscules votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.
- Les *explications* sont aussi *importantes* que les résultats. Rappelez vous que nous ne voyons pas ce que vous pensez, seulement ce que vous avez écrit. Des expressions comme « on voit clairement que » sont donc, ici, vides de sens. Par exemple, si vous concluez quelque chose d'un graphique, expliquez comment vous faites — quitte à refaire une esquisse du dessin avec des annotations.
- Ne confondez pas la *rédaction* de vos réponses avec celle de vos brouillons !
- La grandeur des espaces laissés après les questions vous donne une *indication* sur la *longueur des réponses* attendue. N'employez *pas* le dos de la feuille *précédente* !

Question 1. Donnez l'ensemble des x tels que $-x \leq x \leq x$. Justifiez.

Question 2. Soit la fonction $f : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, dont le graphe est dessiné ci-dessous.



- Quelles sont les racines de f ?
- Résolvez l'inéquation $f(x) \leq 0$.

Justifiez vos réponses.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Pour chacun des complexes suivants, donnez ses parties réelle et imaginaire, son module et son argument.

■ $z_1 = (2 + 3i)(3 - 4i)$

■ $z_3 = 3e^{2i\pi}(2 + 3i)$

■ $z_2 = 1 + i + i^2 + i^3$

■ $z_4 = (1 - i)^{10}$

Question 4. Soient $a \in \mathbb{R}_0$ et $n \in \mathbb{N}_0$. Prouvez par récurrence que

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Résolvez, en fonction du paramètre réel k , le système :

$$\begin{cases} kx + y = -1 \\ x + ky = 1 \\ -x + y = k \end{cases}$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 6. Esquissez les graphes des fonctions suivantes :

■ $f(x) = e^{-|x|}$

■ $g(x) = \frac{1}{1 + \sin x}$

Expliquez votre démarche.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -15 & 3-3a \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

où a est un paramètre réel. Déterminez a pour que la formule

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

soit vérifiée.

Question 8. Prouvez par un calcul que l'égalité

$$\frac{n!}{(i-1)!(n-(i-1))!} + \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!}$$

est vraie pour tout $n, i \in \mathbb{N}$ tels que $i \leq n+1$. (Rappel : $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Prouvez que

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Détaillez les étapes de votre preuve.