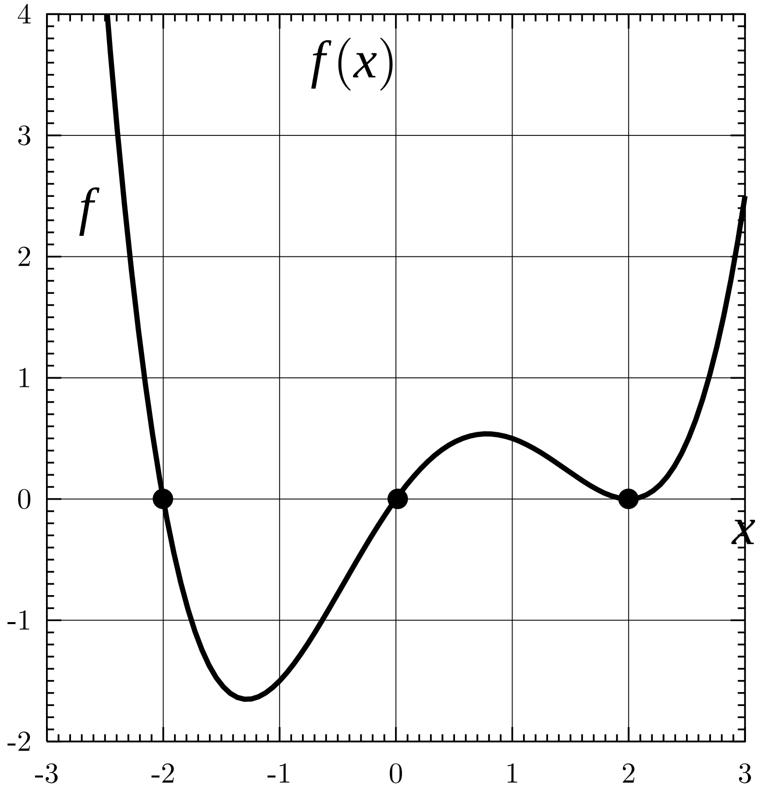
Question 1. *Donnez l'ensemble des x tels que $-x \leqslant x \leqslant x$. Justifiez.*

Rappelons que « $-x \leqslant x \leqslant x$ » est équivalent à « $-x \leqslant x$ et $x \leqslant x$ ». Puisque la deuxième inégalité est toujours vraie, il reste à traiter la première. On a

$$-x \leqslant x \iff 0 \leqslant 2x \iff 0 \leqslant x.$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $[0, +\infty[$.

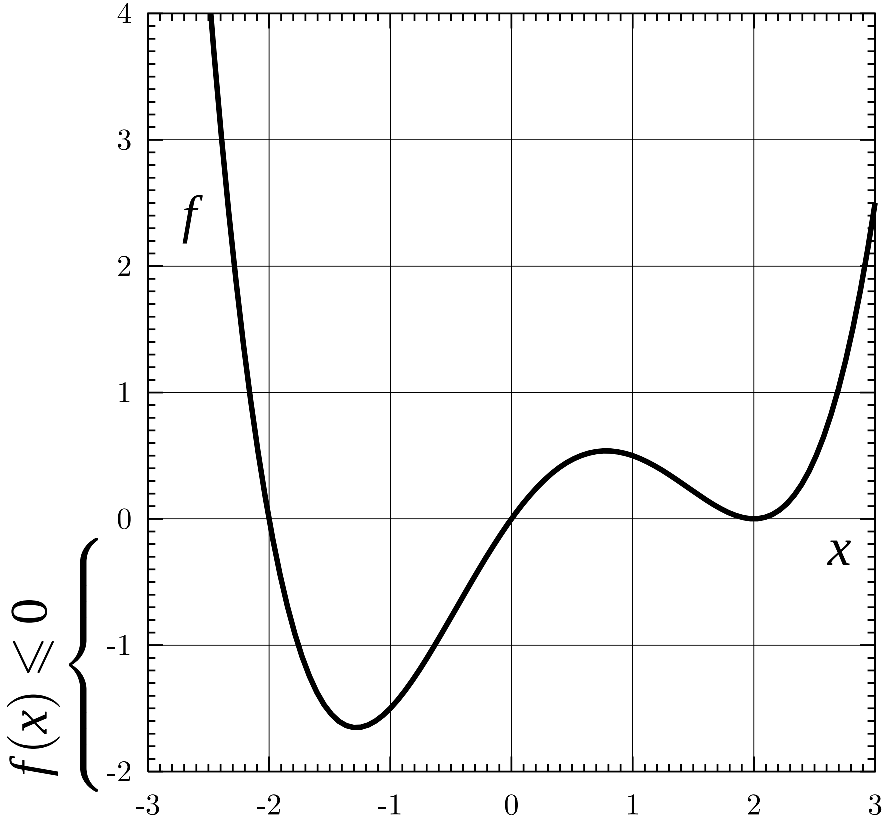


Question 2. *Soit* $f : [-3,3] \to \mathbb{R}$*, dont le graphe est dessiné ci-contre.*

- *Quelles sont les racines de* f *?*

Les racines sont les ordonnées des points d'intersection du graphe de f et de l'axe des x. Ici il y a trois points d'intersection, à savoir $(-2,0)$, $(0,0)$ et $(2,0)$. Les racines sont donc

$$-2,\ 0,\ 2.$$



Question 2 (suite). *Soit la fonction $f : [-3,3] \to \mathbb{R}$, dont le graphe est dessiné ci-contre.*

- *Résolvez l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.*

Il faut regarder quelle partie du graphe est en-dessous de ou sur l'axe des x. Il s'agit de tous les points dont l'ordonnée est entre -2 et 0 ainsi que de 2. La solution s'écrit donc

$$\{x : f(x) \leqslant 0\} = [-2,0] \cup \{2\}.$$

Question 3. *Pour chacun des complexes suivants, donnez ses parties réelle et imaginaire, son module et son argument.*

- $z_1 = (2+3\boldsymbol{i})(3-4\boldsymbol{i})$
- $z_2 = 1+\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}^2+\boldsymbol{i}^3$
- $z_3 = 3\,\mathrm{e}^{2\boldsymbol{i}\pi}(2+3\boldsymbol{i})$
- $z_4 = (1-\boldsymbol{i})^{10}$

$z_1 = 18+\boldsymbol{i}$, donc $\Re e\, z_1 = 18$, $\Im m\, z_1 = 1$, $|z_1| = \sqrt{325}$ et $\operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{arctg}(1/18)$.

$z_2 = 0$, donc $\Re e\, z_2 = 0$, $\Im m\, z_2 = 0$, $|z_2| = 0$ et $\operatorname{Arg} z_2$ n'est pas défini.

$z_3 = 3\,\mathrm{e}^{2\boldsymbol{i}\pi}(2+3\boldsymbol{i}) = 3(2+3\boldsymbol{i})$, d'où $\Re e\, z_3 = 6$, $\Im m\, z_3 = 9$, $|z_3| = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$ et $\operatorname{Arg} z_3 = \operatorname{arctg}(3/2)$.

$z_4 = (1-\boldsymbol{i})^{10}$, donc $|z_4| = |1-\boldsymbol{i}|^{10} = \sqrt{2}^{10} = 2^5$, $\operatorname{Arg} z_4 = 10 \operatorname{Arg} (1-\boldsymbol{i}) \bmod 2\pi = 10(7\pi/4) \bmod 2\pi = 3\pi/2$; en fait, $(1-\boldsymbol{i})^{10} = 2^5\big(\cos(3\pi/2) + \boldsymbol{i}\sin(3\pi/2)\big) = -2^5\boldsymbol{i}$ si bien que $\Re e\, z_4 = 0$ et $\Im m\, z_4 = -2^5$.

Question 4. *Soient $a \in \mathbb{R}_0$ et $n \in \mathbb{N}_0$. Prouvez par récurrence que*

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Vérifions que l'égalité (1) est vraie pour $n = 1$: Le premier membre est $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, le second est $\begin{pmatrix} a & 1a^0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Supposons que, pour $n \leqslant k$, la propriété (1) soit vérifiée ; démontrons que cela entraîne qu'elle est vérifiée pour $n = k+1$. On a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où la deuxième égalité découle de l'hypothèse de récurrence pour $n = k$.

Question 5. *Résolvez le système :* $\begin{cases} kx+y=-1 \\ x+ky=1 \\ -x+y=k \end{cases}$

Soit $\left(\begin{array}{cc|c} k & 1 & -1 \\ 1 & k & 1 \\ -1 & 1 & k \end{array}\right)$ la matrice augmentée du système. Pour résoudre ce système, nous allons échelonner la matrice $[A|b]$:

$$
\begin{aligned}
[A|b] &= \left(\begin{array}{cc|c} k & 1 & -1 \\ 1 & k & 1 \\ -1 & 1 & k \end{array}\right) && \\
&= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 1 \\ k & 1 & -1 \\ -1 & 1 & k \end{array}\right) && L_1 \leftrightarrow L_2 \\
[A^*|b^*] &= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 1 \\ 0 & 1-k^2 & -1-k \\ 0 & 1+k & 1+k \end{array}\right) && \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - kL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}
\end{aligned}
$$

<u>1^er cas</u>. $1-k^2 \neq 0$, càd $k \neq 1$ et $k \neq -1$.

Dans ce cas, nous poursuivons l'échelonnement :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{1-k} \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2/(1-k^2) \\ L_3 \leftarrow L_3/(1+k) \end{array}$$

Nous voyons que pour qu'il y ait une solution, il faut que $1 = -1/(1-k)$, càd que $k = 2$. Dans ce cas, nous obtenons $y = 1$, et $x = -1$. Donc, $S = \{(-1,1)\}$. Si $k \neq 2$, alors le système est impossible : $S = \varnothing$.

<u>2e cas</u> : $k = 1$.

Alors la matrice $[A^*|b^*]$ s'écrit :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

et le système est impossible.

<u>3e cas</u> : $k = -1$.

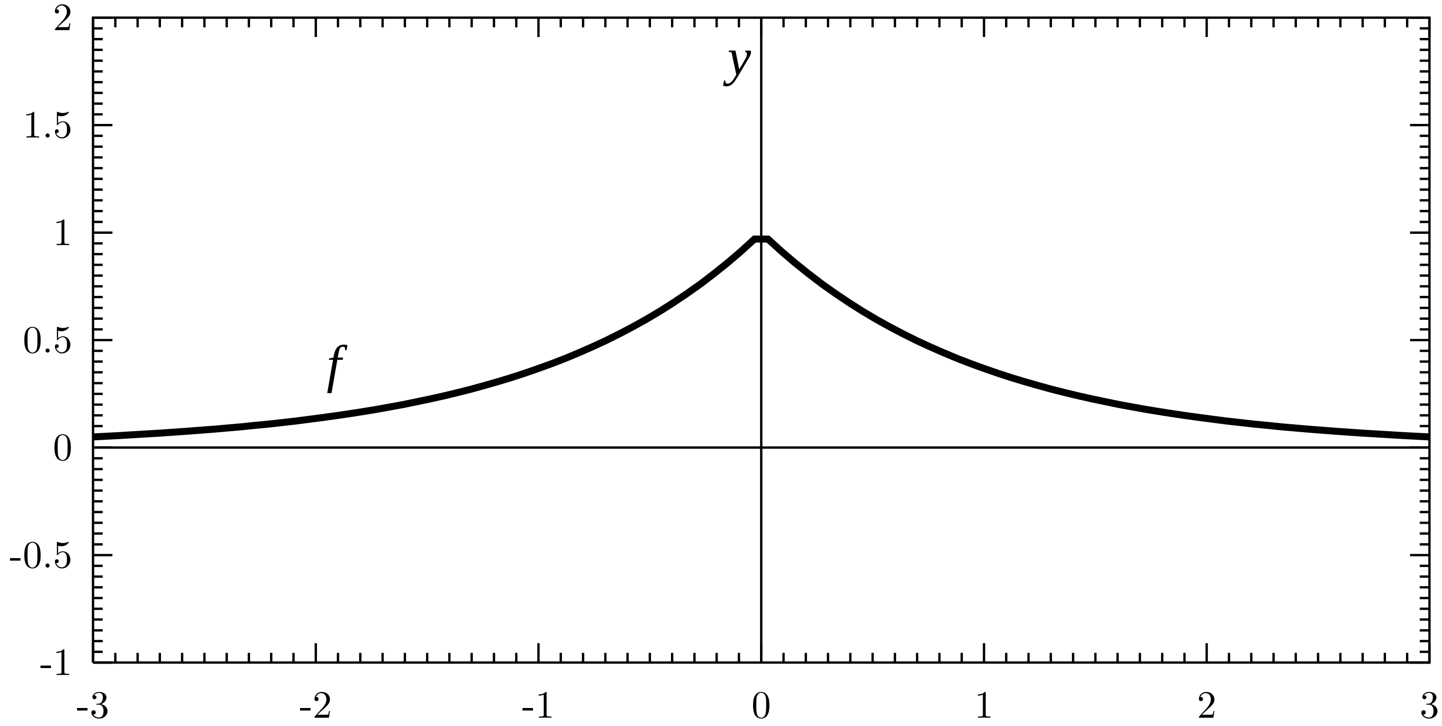
Alors la matrice $[A^*|b^*]$ s'écrit :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

et le système se réduit à l'équation $x - y = 1$, ou encore $x = 1 + y$. Donc $S = \left\{(1+y, y) : y \in \mathbb{R}\right\}$. Le système est simplement indéterminé.

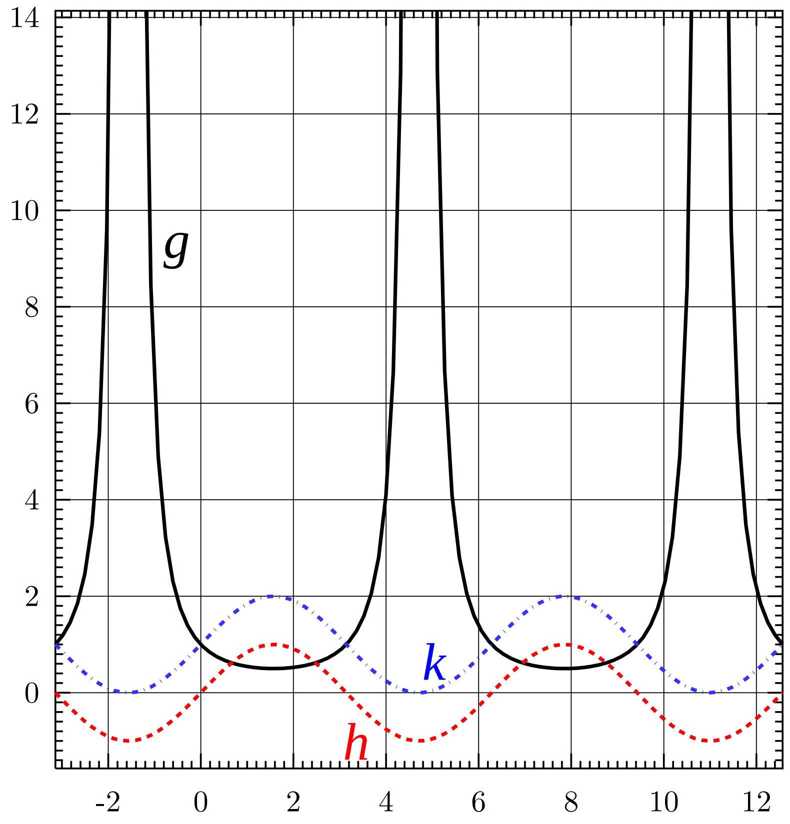
Question 6. *Esquissez le graphe de* $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$*.*

Tout d'abord, lorque $x \geqslant 0$, $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ — c'est une fonction usuelle. De plus, on a $f(-x) = f(x)$, c'est-à-dire que la fonction est paire. Donc, le graphe de f pour $x \leqslant 0$ est le symétrique du graphe de f pour $x \geqslant 0$ par rapport à l'axe des y.



Question 6 (suite). *Esquissez le graphe de* $g(x) = \dfrac{1}{1+\sin x}$.

La fonction g s'obtient en commençant avec $h(x) = \sin x$, en ajoutant 1 à cette fonction pour obtenir $k(x) = h(x)+1$ et finalement en en prenant l'inverse : $g(x) = 1/k(x)$. Nous avons donc commencé par tracer h — c'est facile, c'est un sinus —, ensuite on a k en translatant le graphe de h d'une unité vers le haut et f en remarquant que $f \nearrow$ si $k \searrow$, que $k(x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1$ et que $k(x) \xrightarrow{>0} 0 \Rightarrow f(x) \to +\infty$ (en $3\pi/2 + 2\ell\pi$, $\ell \in \mathbb{Z}$).



Question 7. *Soient les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} -15 & 3-3a \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

où a est un paramètre réel. Déterminez a pour que la formule $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ soit vérifiée.

En utilisant les règles de distributivité de « $\cdot$ » sur « $+$ » à droite et à gauche (à savoir $\mathscr{A}(\mathscr{B}+\mathscr{C}) = \mathscr{A}\mathscr{B}+\mathscr{A}\mathscr{C}$ et $(\mathscr{B}+\mathscr{C})\mathscr{A} = \mathscr{B}\mathscr{A}+\mathscr{C}\mathscr{A}$), on a, en développant le membre de droite

$$(A-B)(A+B) = (A-B)A + (A-B)B = A^2 - BA + AB - B^2$$

Pour que cette dernière expression se réduise à $A^2 - B^2$, il faut et il suffit que $AB = BA$. En effectuant le calcul

$$AB = \begin{pmatrix} 15\cdot 12 & 5(3-3a) \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 12\cdot 15 & -12(3-3a) \\ 0 & 10 \end{pmatrix},$$

on déduit que $AB = BA$ ssi $3-3a = 0$, càd ssi $a = 1$.

Question 8. *Prouvez par un calcul que l'égalité*

$$\frac{n!}{(i-1)!\big(n-(i-1)\big)!}+\frac{n!}{i!(n-i)!}=\frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!} \tag{2}$$

est vraie pour tout $n,i\in\mathbb{N}$ *tels que* $i\leqslant n+1$*. (Rappel :* $n! = 1\cdot 2\cdots n$*.)*

En se rappelant que $(n+1)! = n!(n+1)$, l'identité (2), devient

$$\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!\,(n-i+1)}+\frac{n!}{i\,(i-1)!(n-i)!}=\frac{(n+1)\,n!}{i\,(i-1)!(n-i)!\,(n+1-i)}$$

ou encore, après simplification,

$$\frac{1}{(n-i+1)}+\frac{1}{i}=\frac{n+1}{i(n+1-i)}.$$

En mettant le membre de gauche au même dénominateur, on obtient une fraction dont le dénominateur est $(n+1-i)i$ et le numérateur est $i+(n-i+1)=n+1$ ce qui est bien identique au membre de droite.

Question 9. *Prouvez que* $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

Faisons-le par récurrence sur n. Si $n = 0$, on ne peut prendre que $i = 0$ et on a $\binom{0}{0} = 1$. Comme $0! = 1$ (puisqu'il faut que $1 = 1! = (0+1)! = 0! \cdot 1$), la fraction vaut elle aussi $\frac{0!}{0!0!} = 1$ et on a bien l'égalité.

Supposons que la formule soit vraie pour les $n \leqslant k$ et prouvons-la pour $n = k+1$. On a vu au cours que

$$\binom{k+1}{i} = \binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}. \tag{3}$$

L'hypothèse de récurrence pour $n = k$ permet de remplacer les termes de droite par la formule correspondante et la question 8 en donne la somme :

$$\binom{k+1}{i} = \frac{k!}{i!(k-i)!} + \frac{k!}{(i-1)!(k-(i-1))!} = \frac{(k+1)!}{i!((k+1)-i)!}.$$

Il est à remarquer que (3) ne vaut que pour $i \geqslant 1$. Il faut donc faire à part le cas $i = 0$: par définition $\binom{n}{0} = 1$ et $\frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$. Les deux sont donc bien égaux quel que soit n.