

Mathématique Élémentaire

Test n° 5

(15 octobre 2001)

Nom :

Prénom :

Section :

- Veuillez commencer par écrire en lettres majuscules votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.
- Si la première candidature que vous suivez actuellement n'est pas votre première année d'étude après l'obtention du diplôme d'études secondaires, veuillez préciser ci-dessous le ou les cursus suivis (y compris l'établissement) :
.....
.....
- Les *explications* sont aussi *importantes* que les résultats. Rappelez vous que nous ne voyons pas ce que vous pensez, seulement ce que vous avez écrit.
- Ne confondez pas la *rédaction* de vos réponses avec celle de vos brouillons !
- La grandeur des espaces laissés après les questions vous donne une *indication* sur la *longueur des réponses* attendue. N'employez *pas* le dos de la feuille *précédente* !

Question 1. Quel est l'argument des nombres complexes

$$z_1 = 3\left(\cos \frac{7\pi}{2} + i \sin \frac{7\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{3}(\sin \pi + i \cos \pi).$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Décrivez géométriquement les solutions dans \mathbb{C} de $x^{12} = 1$; donnez également ces solutions sous forme trigonométrique. Quelle est la relation entre les solutions dans \mathbb{C} de $x^{12} = 1$ et les solutions dans \mathbb{C} de $x^6 = -1$?

Nom :

Prénom :

Section :

Question 3. Calculez le déterminant suivant

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{pmatrix}.$$

Explicitez les différentes étapes de vos calculs.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 4. Dites si les définitions suivantes correspondent à des fonctions. Justifiez vos réponses. Dans l'affirmative, précisez le domaine de définition.

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\operatorname{tg} x}{1 - x^2}$
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y \text{ tel que } y^2 = x$
- $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y \text{ tel que } y^3 = x$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Donnez la matrice A dont l'inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question 6. Prouvez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=0}^n 2^j = 2^{n+1} - 1.$$