Question 1. *Quel est l'argument des nombres complexes*

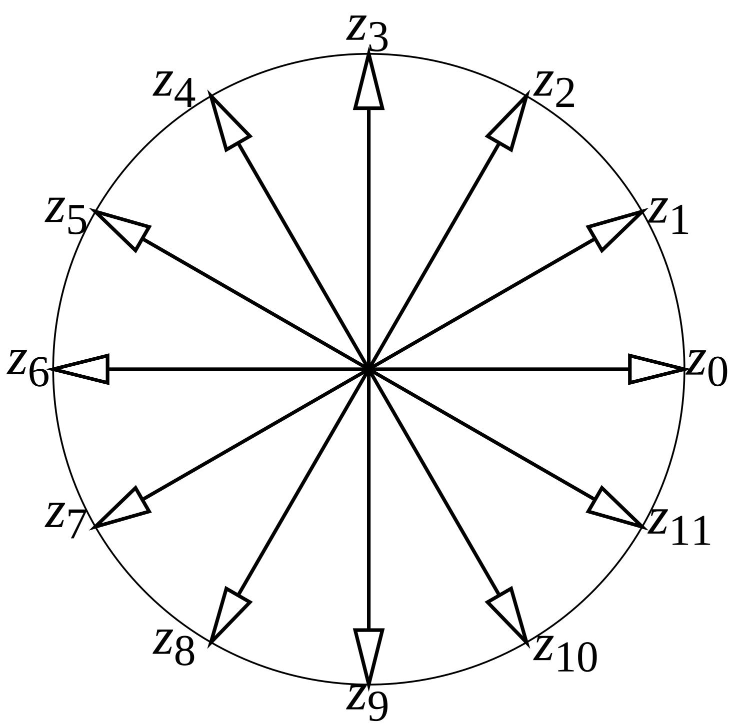
$$z_1 = 3\left(\cos\frac{7\pi}{2} + \boldsymbol{i}\sin\frac{7\pi}{2}\right) \qquad \textit{et} \qquad z_2 = \sqrt{3}(\sin\pi + \boldsymbol{i}\cos\pi).$$

z_1 est déjà sous forme trigonométrique (presque) : il suffit de réduire $7\pi/2 \bmod 2\pi$, ce qui donne $3\pi/2$. Donc l'argument de $z_1 = 3\pi/2$.

Le complexe z_2 n'est pas sous forme trigonométrique ; on peut facilement l'écrire sous cette forme en remarquant que $\sin\pi = 0$ et $\cos\pi = -1$, on obtient donc $\operatorname{Arg} z_2 = 3\pi/2$.

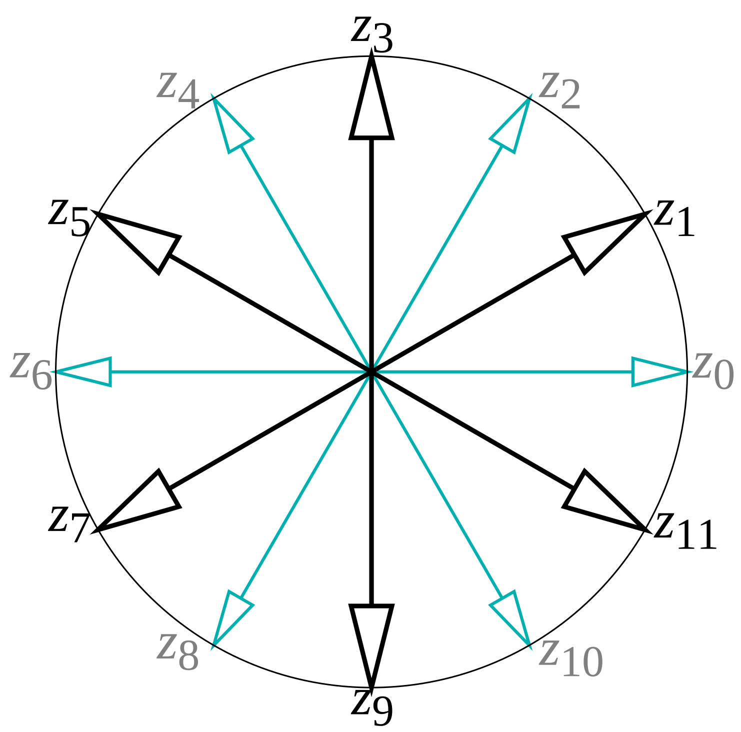
Question 2. *Décrivez géométriquement les solutions dans $\mathbb{C}$ de $x^{12} = 1$; donnez également ces solutions sous forme trigonométrique.*

Les solutions z de $x^{12} = 1$ vérifient $|z|^{12} = |z^{12}| = |1| = 1$ avec $|z| \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, c'est-à-dire que $|z| = 1$. D'autre part, si z est solution de $x^{12} = 1$, on aura $\operatorname{Arg} z^{12} = \operatorname{Arg} 1 = 0$, c'est-à-dire $12 \operatorname{Arg} z \pmod{2\pi} = 0$; les solutions pour $\operatorname{Arg} z$ sont $0,\ 2\pi/12,\ 4\pi/12, \ldots,\ 22\pi/12$, c'est-à-dire $\operatorname{Arg} z = 0 + k\pi/6$ avec $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 11\}$. Donc les solutions sont :
$z_k = \operatorname{cis}(k\pi/6)$, avec $k = 0, 1, \ldots, 11$.



Question 2 (suite). *Quelle est la relation entre les solutions dans $\mathbb{C}$ de $x^{12} = 1$ et les solutions dans $\mathbb{C}$ de $x^6 = -1$?*

On a que si $z^6 = -1$, alors $(z^6)^2 = (-1)^2$, c'est-à-dire $z^{12} = 1$. Donc les six solutions de $z^6 = -1$ sont incluses à celles de $z^{12} = 1$, ce sont celles de la forme $z_k = \mathrm{cis}(k\pi/6)$ avec $k = 1, 3, 5, 7, 9, 11$.



Question 3. *Calculez le déterminant suivant*

$$
\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\
1 & 1+a_1 & 1 & \dots & 1 & 1\\
1 & 1 & 1+a_2 & \dots & 1 & 1\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_{n-1} & 1\\
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a_n
\end{pmatrix}\\
&= \det\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\
0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & a_2 & \dots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n
\end{pmatrix}
\qquad
\begin{array}{c}
L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\
L_3 \leftarrow L_3 - L_1\\
\vdots\\
L_n \leftarrow L_n - L_1\\
L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} - L_1
\end{array}\\
&= a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n
\end{aligned}
$$

car le déterminant d’une matrice triangulaire supérieure est égal au produit des éléments situés sur la diagonale principale.

Question 4. *Dites si les définitions suivantes correspondent à des fonctions. Dans l'affirmative, précisez le domaine de définition.*

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{\operatorname{tg} x}{1 - x^2}$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y$ *tel que* $y^2 = x$
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y$ *tel que* $y^3 = x$

f est une fonction car, x étant donné, il n'y a pas de doute sur la valeur à attribuer à $f(x)$. Pour que l'expression $\operatorname{tg} x/(1 - x^2)$ ait un sens, il faut que $\operatorname{tg} x$ existe, càd $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et que le dénominateur soit non nul, càd $x \neq -1$ et $x \neq 1$. Donc, $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, \pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

g n'est *pas* une fonction : pour $x = 1$ par exemple, il y a deux y possibles (à savoir $y = -1$ et $y = 1$) et la définition de g ne permet pas d'en exclure un.

h est une fonction car, pour tout x, il existe *exactement un* y tel que $y^3 = x$, à savoir $y = \sqrt[3]{x}$. Le fait qu'il y ait une valeur y pour chaque $x \in \mathbb{R}$ dit que $\operatorname{Dom} h = \mathbb{R}$.

Question 5. *Donnez la matrice A dont l'inverse est* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De l'égalité $A \cdot A^{-1} = \mathbf{1}$, on déduit que $(A^{-1})^{-1} = A$. On applique donc à A^{-1} la méthode de la matrice compagnon :

$$
\begin{array}{lll}
A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A
\end{array}
$$

Question 5 (suite). *Donnez la matrice A dont l'inverse est* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Vérification

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}.$$

Question 6. *Prouvez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=0}^{n} 2^j = 2^{n+1} - 1$.*

Si $n = 0$, le 1$^{\text{er}}$ membre vaut 1, le second vaut $2^1 - 1 = 1$; c'est donc vérifié.

Supposons que cette égalité ait été prouvée pour $n \leqslant k$ (hypothèse de récurrence). Prouvons-la pour $n = k+1$. On a

$$\sum_{j=0}^{k+1} 2^j = \sum_{j=0}^{k} 2^j + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1}$$

(on a utilisé l'hypothèse de récurrence pour obtenir le dernière égalité), ce qui est égal à $2^{k+2} - 1$. Cela termine la preuve.