Question 1. *Résoudre l'équation* $(2\boldsymbol{i}z+1)^3 = -1$ *dans* $\mathbb{C}$*.*

L'équation $u^3 = -1$ a pour solutions $u_k := \operatorname{cis}(-\pi/3 + k2\pi/3)$, $k = 0,1,2$. Comme l'équation de départ n'est rien d'autre que $u^3 = -1$ avec $u = 2\boldsymbol{i}z+1$, on en déduit que les solutions sont données par $z_k = (u_k - 1)/(2\boldsymbol{i})$, $k = 0,1,2$, c'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \frac{u_0 - 1}{2\boldsymbol{i}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} - 1}{2\boldsymbol{i}} = \frac{-\sqrt{3}+\boldsymbol{i}}{4} \\
z_1 &= \frac{u_1 - 1}{2\boldsymbol{i}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} - 1}{2\boldsymbol{i}} = \frac{\sqrt{3}+\boldsymbol{i}}{4} \\
z_2 &= \frac{u_2 - 1}{2\boldsymbol{i}} = \frac{-1-1}{2\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{i}
\end{aligned}
$$

REMARQUE : Puisque $(2v+1)^3 = -1$ est une équation à coefficients réels, v est solution de cette équation ssi $\bar{v}$ l'est. Or, z est solution de l'équation de départ ssi $v = \boldsymbol{i}z$ est solution de cette équation. Donc,

$$z \text{ sol.} \iff v = \boldsymbol{i}z \text{ sol.} \iff v' := \bar{v} = \overline{\boldsymbol{i}z} \text{ sol.} \iff z' := v'/\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{i}z}/\boldsymbol{i} \text{ sol.}$$

En conclusion, $z = a + b\boldsymbol{i}$ est solution ssi $z' = -a + b\boldsymbol{i}$ est solution.

Question 2. *Calculez* $\sum_{i=3}^{n}(i^2-i)$*, pour* $n \geqslant 3$*.*

$$\sum_{i=3}^{n}(i^2-i) = \sum_{i=3}^{n} i^2 - \sum_{i=3}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{2} i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{2} i\right)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5 - \left(\frac{n(n+1)}{2} - 3\right)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1-3)}{6} - 2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} - 2$$

$$= \frac{n(n^2-1)}{3} - 2$$

Question 2 (suite). *Calculez* $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(2j-i)$.

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(2j-i) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} j + \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(j-i)}_{(*)}.$$

Vu que la seconde somme ($*$) est la somme de tous les éléments d'une matrice antisymétrique (vue au cours), ($*$) est égal à 0. La somme demandée est donc égale à

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(2j-i) = \sum_{j=1}^{n} nj = n\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

Question 3. *Prouvez que $\sqrt{27}$ n'est pas rationnel.*

Sinon, $\sqrt{27}$ est rationnel (hypothèse par l'absurde) et il s'écrit $\sqrt{27} = b/a$ avec $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1$ (en simplifiant la fraction). On en déduit que $b^2 = 3^3 a^2$ et donc 3^3 divise b^2.

Puisque l'exposant de tout facteur premier d'un carré est pair, on conclut que 3^4 divise b^2 et donc 3 divise a^2. Par conséquent 3 est un facteur commun de a et b, ce qui contredit $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1$. L'hypothèse par l'absurde est donc fausse, sa négation est donc vraie, c'est-à-dire que $\sqrt{27}$ n'est pas rationnel.

ON PEUT REMPLACER LE PARAGRAPHE PRÉCÉDENT PAR LA PREUVE SUIVANTE : Puisque l'exposant de tout facteur premier d'un carré est pair, on conclut que l'exposant de 3 dans le nombre b^2 est pair et que l'exposant de 3 dans le nombre $3^3 a^2$ est impair. Or, notre hypothèse par l'absurde implique $b^2 = 3^3 a^2$. Vu que la décomposition en facteurs premiers d'un entier est unique, ceci est contradictoire ; $\sqrt{27}$ n'est donc pas rationnel.

Question 4. *Résolvez le système suivant :*

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 - x_2 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \\ -x_5 = 1 \\ 2x_6 = 4 \\ x_8 = 1 \end{cases}$$

On a $x_1 = 0$, $x_2 = x_3$, $x_6 = 2$ et $x_8 = 1$. Puisque $x_5 = -1$, on a $x_4 = 1$. La solution du système est l'ensemble

$$\left\{(0, x_2, x_2, 1, -1, 2, x_7, 1) : x_2, x_7 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Le système est doublement indéterminé.

Question 5. *Soit m un paramètre réel. Résolvez le système*

$$\begin{cases} mx+y-z=1 \\ x+my-z=1 \\ -x+y+mz=1 \end{cases}$$

uniquement *dans le cas où le déterminant de la matrice du système vaut 0. Interprétez géométriquement les résultats.*

Calculons le déterminant de la matrice du système :

$$\text{dét}\begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \\ -1 & 1 & m \end{pmatrix} \overset{C_2 \leftarrow C_2+C_3}{=} \text{dét}\begin{pmatrix} m & 0 & -1 \\ 1 & m-1 & -1 \\ -1 & 1+m & m \end{pmatrix} \overset{C_1 \leftarrow C_1+mC_3}{=} \text{dét}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1-m & m-1 & -1 \\ -1+m^2 & 1+m & m \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{1+3}(-1)\big(1-m^2+(1-m^2)(m-1)\big)$$

$$= m^3-m = m(m-1)(m+1)$$

Ce déterminant est nul ssi $m=0$, $m=1$ ou $m=-1$.

Question 5 (suite).

1er cas : $m = 0$

Le système s'écrit :

$$\begin{aligned} y - z &= 1 \qquad (1)\\ x - z &= 1 \qquad (2)\\ -x + y &= 1 \qquad (3) \end{aligned}$$

Les équations (1) et (2) donnent $y = 1 + z$ et $x = 1 + z$. Donc $x = y$. Alors l'équation (3) donne $0 = 1$. Le système est impossible.

Question 5 (suite).

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE : les équations (1)–(3) correspondent à trois plans de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{v_1} = (0,1,-1)$, $\overrightarrow{v_2} = (1,0,-1)$ et $\overrightarrow{v_3} = (-1,1,0)$. Puisque $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont non-colinéaires, les deux premiers plans se coupent selon la droite D_{12} d'équation paramétrique

$$x = 1+\lambda, \quad y = 1+\lambda, \quad z = \lambda$$

Cette droite admet $\overrightarrow{v} = (1,1,1)$ comme vecteur directeur et passe par $(1,1,0)$. On remarque que $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v_3}$ sont perpendiculaires. Puisque le point $(1,1,0)$ n'appartient pas au plan d'équation $-x+y=1$, la droite D_{12} est parallèle au 3^{e} plan. Le système est donc impossible.

Question 5 (suite).

2^{e} cas : $m = 1$.

Le système se réduit à

$$x + y - z = 1 \quad (4)$$
$$-x + y + z = 1 \quad (5)$$

En faisant, $(4) + (5)$, on a $y = 1$. Donc, $x = z$. La solution du système est donc l'ensemble $S := \{(x, 1, x) : x \in \mathbb{R}\}$. Le système est simplement indéterminé.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE : on a deux plans sécants en la droite dont un vecteur directeur est $(1, 0, 1)$ et passant par $(0, 1, 0)$.

Question 5 (suite).

3$^{\text{e}}$ cas : $m = -1$.

Le système se réduit à

$$-x + y - z = 1 \tag{6}$$
$$x - y - z = 1 \tag{7}$$

En faisant, $(6) + (7)$, on a $z = -1$. Donc, $x = y$. La solution du système est donc l'ensemble $S := \{(x, x, -1) : x \in \mathbb{R}\}$. Le système est simplement indéterminé.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE : on a deux plans sécants en la droite dont un vecteur directeur est $(1, 1, 0)$ et passant par $(0, 0, -1)$.

Question 6. *Soit*

$$f(x) := \sin\big(g(\mathrm{e}^x)\big) \qquad \textit{où } g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Calculez $\partial_x f(0)$ *sachant que* $g(0) = \pi/2$, $\partial g(0) = \sqrt{2}$, $g(1) = \mathrm{e}$, $\partial g(1) = -\pi/2$, $\partial g(\pi/2) = 0$.

D'après la « chain rule », on a

$$\partial_x f(x) = \big(\partial_z \sin z\big)_{z=g(\mathrm{e}^x)} \big(\partial_y g(y)\big)_{y=\mathrm{e}^x} \partial_x \mathrm{e}^x = \cos\big(g(\mathrm{e}^x)\big)\, \partial g(\mathrm{e}^x)\, \mathrm{e}^x.$$

Par conséquent,

$$\partial_x f(0) = \cos(g(1))\, \partial g(1) = -\frac{\pi}{2} \cos(\mathrm{e}).$$

Question 7. *Donnez une approximation de* $\ln(1{,}01)$*.*

Le nombre $1{,}01$ étant proche de 1,nous allons approximer $\ln x$ par sa tangente au point 1 :

$$\ln x \approx \ln 1 + (\partial_\xi \ln \xi)_{\xi=1}(x-1) \qquad \text{si } x \approx 1.$$

Comme $\ln 1 = 0$ et $\partial_\xi(\ln \xi) = 1/\xi$, on trouve

$$\ln(1{,}01) \approx 0{,}01.$$

REMARQUE : Pour avoir une approximation de $\ln(1{,}01)$, on aurait pu approximer $x \mapsto \ln(1+x)$ par sa tangente au point 0.

Question 8. *Écrivez un algorithme qui, étant donné un naturel $n \in \mathbb{N}$, renvoie un entier p et des nombres $a_i \in \{0,1,2\}$ pour $i = 0,1,\dots,p$, tels que $a_p \dots a_1 a_0$ soit l'expansion en base 3 de n. En d'autres termes, l'algorithme doit calculer la fonction*

$$\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \{0,1,2\} \times \cdots \times \{0,1,2\} : n \mapsto (p, a_p, \dots, a_0) \text{ tel que } n = \sum_{i=0}^{p} a_i 3^i.$$

Si $n = (a_p 3^{p-1} + \cdots + a_1)3 + a_0$, alors nécessairement on a que

$$a_0 = n \bmod 3 \qquad \text{et} \qquad n_0 := n \operatorname{div} 3 = a_p 3^{p-1} + \cdots + a_1.$$

Pour a_1, on procède de la même manière que pour a_0 mais avec n_0 au lieu de n. Ainsi :

$$a_1 = n_0 \bmod 3 \qquad \text{et} \qquad n_1 := n_0 \operatorname{div} 3 = a_p 3^{p-2} + \cdots + a_2.$$

À la i^{e} étape, on a (le vérifier par récurrence) :

$$a_i = n_{i-1} \bmod 3 \qquad \text{et} \qquad n_i := n_{i-1} \operatorname{div} 3 = a_p 3^{p-i-1} + \cdots + a_{i+1}.$$

Question 8 (suite).

Quand s'arrête-t-on ? À la p^{e} étape on aura $a_p = n_{p-1} \bmod 3$ et $n_p = n_{p-1} \operatorname{div} 3 = 0$. En résumé :

$$\begin{array}{ll}
a_0 = n \bmod 3 & n_0 = n \operatorname{div} 3 \\
a_1 = n_0 \bmod 3 & n_1 = n_0 \operatorname{div} 3 \\
\vdots & \vdots \\
a_i = n_{i-1} \bmod 3 & n_i = n_{i-1} \operatorname{div} 3 \\
\vdots & \vdots \\
a_p = n_{p-1} \bmod 3 & n_p = 0
\end{array}$$

Comme on n'a besoin que d'un n_i à la fois, il suffit d'utiliser *une* variable, disons N, pour stocker sa valeur. D'autre part, on mettra les valeurs des a_i dans un tableau indicé par i : $(A_i)_{i=0}^{p}$. On obtient donc que l'étape i se compose des instructions :

$$A_i \leftarrow N \bmod 3 \; ; \quad N \leftarrow N \operatorname{div} 3$$

Il faut aussi penser à faire évoluer i de manière appropriée. La condition d'arrêt est $N = 0$.

Question 8 (suite).

En résumé l'agorithme s'écrit :

$$\begin{array}{l} N \leftarrow n\ ;\ i \leftarrow 0 \\ \text{Tant que } N > 0 \text{ faire} \\ \qquad \begin{cases} A_i \leftarrow N \bmod 3 \\ N \leftarrow N \operatorname{div} 3\ ;\ i \leftarrow i+1 \end{cases} \end{array}$$

Remarquons que, lorsque $N = 0$, la variable i contient le dernier i pour lequel on a fait $A_i \leftarrow \ldots$ augmenté de 1, càd $i = p+1$.

$$\begin{cases} N \leftarrow n\ ;\ i \leftarrow 0 \\ \text{Tant que } N > 0 \text{ faire} \\ \qquad \begin{cases} A_i \leftarrow N \bmod 3 \\ N \leftarrow N \operatorname{div} 3\ ;\ i \leftarrow i+1 \end{cases} \\ \left\langle \begin{array}{l} \text{si } i \geqslant 1\text{, la réponse est } (i-1, A_p, \ldots, A_0) \\ \text{si } i = 0\text{, alors } n = 0 \text{ et la réponse est } (1,0) \end{array} \right\rangle \end{cases}$$