Mathématique Élémentaire

Examen

(28 octobre 2002)

Nom :

Prénom :

Section :

Veuillez commencer par écrire en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION sur *toutes* les feuilles.

Veuillez lire attentivement ces quelques consignes et conseils.

- Les calculatrices ne sont *pas* autorisées.
- Quand il est nécessaire de justifier, votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification dans un tel cas, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- L'espace laissé après chaque question vous donne une *indication* sur la longueur de la réponse attendue.
- N'employez *pas* le dos de la feuille d'une *autre question* pour finir votre réponse !

Question 1. Calculer

- $\left(\sum_{n=0}^{k} (2^n \bmod 5)\right) \bmod 5$
- $\left(\sum_{n=0}^{k} 2^n\right) \bmod 5$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 1 (suite).

- Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right)$

- Calculer $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{t} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} 2^k$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 2. Résolvez algébriquement *et* graphiquement l'inéquation suivante :

$$-|x|+1 \leqslant x^2+1$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3.

(a) Trouver la matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telle que

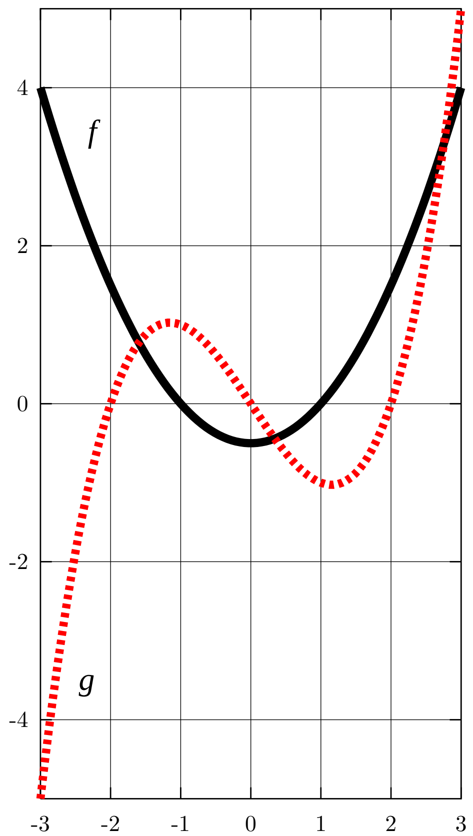
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nom :
Prénom :
Section :

Question 3 (suite).

(b) Résoudre le système

$$\begin{cases} x+z=7 \\ 2x+y+4z=0 \\ 3x+2y=-14 \end{cases}$$



Question 4. Soient $f:[-3,3]\to\mathbb{R}$ et $g:[-3,3]\to\mathbb{R}$ deux fonctions dont les graphes sont dessinés ci-contre. Déterminez

$$\{x\in[-3,3] : f(x)\,g(x)\leqslant 0\}.$$

Expliquez votre raisonnement.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 5. Déterminez les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $x = 0$ vérifie l'inégalité

$$ax^3 + 2a(x+1)^2 + a^2(x-1) \geqslant a(x+1)^3.$$

Justifiez votre démarche.

Question 6. Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ deux matrices inversibles. Montrez que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 7. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Considérons deux fonctions $f :]a,b[\to]c,d[$ et $g :]c,d[\to]a,b[$ dont la dérivée existe en tous les points de leur domaine. Supposons que

$$g \circ f = \mathbb{1}_{]a,b[}.$$

Montrez que, pour tout $x \in]a,b[$,

$$\partial g(f(x)) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \partial f(x) = \frac{1}{\partial g(f(x))}.$$

Question 7 (suite). À partir du résultat ci-dessus, établissez la formule de dérivation de la fonction arccos : $]-1,1[\to]0,\pi[$ à partir de celle pour cos : $]0,\pi[\to]-1,1[$.

Nom :

Prénom :

Section :

Question 8. Les relations suivantes définissent-elles des fonctions ? Justifiez en détail vos réponses (en particulier, donnez des contre-exemples *explicites*).

- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto (w \text{ tel que } w^2 = z)$
- $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto (w \text{ tel que } w^2 = z \text{ et } \Re\mathrm{e}\, w \geqslant 0)$
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (y \text{ tel que } y^2 - 1 = x^2 \text{ et } y > 0)$
- $k : \mathbb{R}^{4\times4} \to \mathbb{R} : A \mapsto \text{dét} A$

Mathématique Élémentaire

Examen (28 octobre 2002)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 9. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Montrez, par récurrence, que pour tout $n \geqslant 2$,

$$\text{dét} A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

Nom :

Prénom :

Section :

Question 10. Calculer $\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=0}^{\ell}(i-j)$

Question 11. Quels sont les complexes z qui vérifient

$$|z^2|+|z|+1=0.$$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 12.

- Prouver que $\sqrt[6]{3} \notin \mathbb{Q}$, sachant que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

- Calculer $|5\boldsymbol{i}+3|$ et $|(5\boldsymbol{i}+3)^2|$.

- Mettre sous forme trigonométrique les complexes suivants : $-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$ et $\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right)^{17}$.

Mathématique Élémentaire

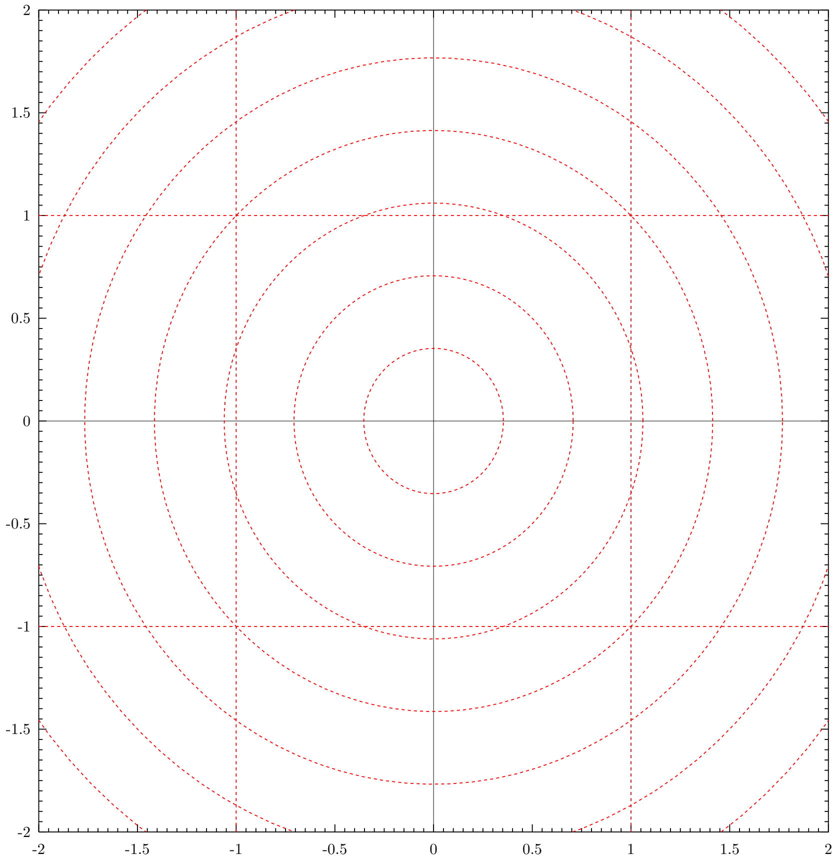
Examen (28 octobre 2002)

Nom :

Prénom :

Section :

Question 13. Représentez *graphiquement* les solutions complexes de $Z^{12} = 64$. Votre dessin doit être explicite. Expliquez votre démarche (avant de faire le dessin ci-dessous).



Nom :

Prénom :

Section :

Question 14. Soit $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la fonction définie par

$$L(x,y,z) = (2x+y, y-3z, -2x-y+z, 5x).$$

(a) Prouvez que L vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \forall (x',y',z') \in \mathbb{R}^3, \quad L\big((x,y,z)+(x',y',z')\big) = L(x,y,z) + L(x',y',z')$
- $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad L\big(\lambda(x,y,z)\big) = \lambda L(x,y,z)$

Nom :	
Prénom :	
Section :	

Question 14 (suite). Posons $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

(b) Complétez pour que l'égalité suivante soit vérifiée pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(x,y,z) = \underline{\qquad\qquad} e_1 + \underline{\qquad\qquad} e_2 + \underline{\qquad\qquad} e_3$$

(c) Soit $v \in \mathbb{R}^4$. Prouvez que v est orthogonal à (tous les vecteurs de) $\operatorname{Im} L$ si et seulement si $v \perp L(e_i)$ pour $i = 1,2,3$. INDICATION : Les points précédents peuvent vous être utiles !