Mathématique Élémentaire

Examen

(28 octobre 2002)

Correction

Question 1. *Calculer*

- $\left(\sum_{n=0}^{k}(2^n \bmod 5)\right) \bmod 5$
- $\left(\sum_{n=0}^{k} 2^n\right) \bmod 5$

Puisque

$$(x+y) \bmod 5 = (x \bmod 5 + y \bmod 5) \bmod 5 \qquad \text{et} \qquad (x \cdot y) \bmod 5 = (x \bmod 5 \cdot y \bmod 5) \bmod 5.$$

on a que les deux sommes sont égales et sont égales à $(1+2+4+3+1+\cdots) \bmod 5$, car $2^0 \bmod 5 = 1$, $2^1 \bmod 5 = 2$, $2^2 \bmod 5 = 4$, $2^3 \bmod 5 = 3$, $2^4 \bmod 5 = 1$,... (la suite $2^n \bmod 5$ est périodique de période 4 puisque $2^4 \bmod 5 = 1$).

De plus, on constate que la somme de 4 termes consécutifs de la somme

$$\left(\sum_{n=0}^{k}(2^n \bmod 5)\right) \bmod 5$$

est toujours constituée de $1, 2, 4$ et 3 (pas nécessairement dans cet ordre) et que cette somme vaut $0 \bmod 5$. Par conséquent, en regroupant les termes de la somme 4 par 4, on obtient

$$\left(\sum_{n=0}^{k}(2^n \bmod 5)\right) \bmod 5 = \left(\sum_{n=0}^{j}(2^n \bmod 5)\right) \bmod 5 \quad \text{avec } j = k \bmod 4$$

Si $j=0$, la somme vaut 1, si $j=1$ c'est 3, si $j=2$ on obtient 2 et si $j=3$ on a 0.

Question 1 (suite). *Calculer* $\sum_{k=0}^{m} \cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right)$

Cette somme est la partie réelle de la somme

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\cos\frac{2k\pi}{m} + \boldsymbol{i}\sin\frac{2k\pi}{m}\right).$$

Par conséquent, la somme demandée est

$$\begin{aligned}
\Re\mathrm{e}\left(\sum_{k=0}^{m} \mathrm{e}^{\boldsymbol{i}2\pi k/m}\right) &= \Re\mathrm{e}\left(\sum_{k=0}^{m} \left(\mathrm{e}^{\boldsymbol{i}2\pi/m}\right)^k\right) \\
&= \Re\mathrm{e}\left(\frac{(\mathrm{e}^{\boldsymbol{i}2\pi/m})^{m+1}-1}{\mathrm{e}^{\boldsymbol{i}2\pi/m}-1}\right) \qquad \text{(formule pour les sommes géométriques)} \\
&= \Re\mathrm{e}\left(\frac{\mathrm{e}^{\boldsymbol{i}2\pi/m}-1}{\mathrm{e}^{\boldsymbol{i}2\pi/m}-1}\right) \qquad \text{(car } \left(\mathrm{e}^{\boldsymbol{i}2\pi/m}\right)^m = 1\text{)} \\
&= \Re\mathrm{e}(1) = 1
\end{aligned}$$

Mais attention : si $m = 0$, la question n'a pas de sens, on ne peut pas diviser par 0. Si $m = 1$, la formule n'est pas valable car la somme vaut 2 puisque

$$\sum_{k=0}^{1} \cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) = \cos 0 + \cos 2\pi.$$

Question 1 (suite). *Calculez* $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{t} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} 2^k$.

Cette somme vaut

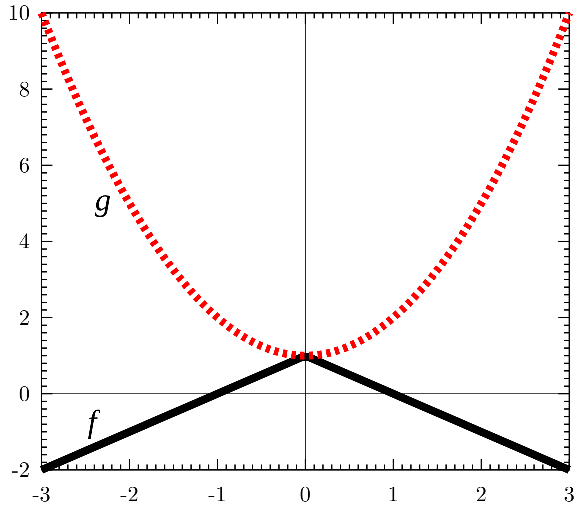
$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{t} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} 2^k 1^{\ell-k} &= \sum_{\ell=1}^{t} 3^\ell && \text{(par la formule du binôme de Newton)} \\ &= \frac{3^{t+1}-3}{3-1} && \text{(formule pour la somme des éléments d'une suite géométrique de raison 3)} \\ &= \frac{3^{t+1}-3}{2} \end{aligned}$$

Question 2. *Résolvez algébriquement* et *graphiquement l'inéquation suivante :*

$$-|x| + 1 \leqslant x^2 + 1$$

ALGÉBRIQUEMENT : L'inéquation $-|x| + 1 \leqslant x^2 + 1$ est équivalente à $-|x| \leqslant x^2$ dont les solutions sont tous les $x \in \mathbb{R}$. En effet, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $-|x| \leqslant 0 \leqslant x^2$ ce qui montre que l'inégalité est satisfaite.

GÉOMÉTRIQUEMENT : Posons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -|x| + 1$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + 1$. Le graphique ci-contre montre que, en toute abcisse x, le graphe de f est en dessous de (ou égal à en $x = 0$) celui de g. Ceci indique que $f(x) \leqslant g(x)$ quel que soit x, c'est-à-dire que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathbb{R}$.



Question 3.

(a) *Trouver la matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telle que*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

De l'égalité $A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}$, on déduit que $(A^{-1})^{-1} = A$. Appliquons à A^{-1} la méthode de la matrice compagnon.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow \frac{L_3}{7} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \frac{8}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{-12}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix} = A$$

Question 3 (suite).

(b) *Résoudre le système*

$$\begin{cases} x + z = 7 \\ 2x + y + 4z = 0 \\ 3x + 2y = -14 \end{cases}$$

Sous forme matricielle, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

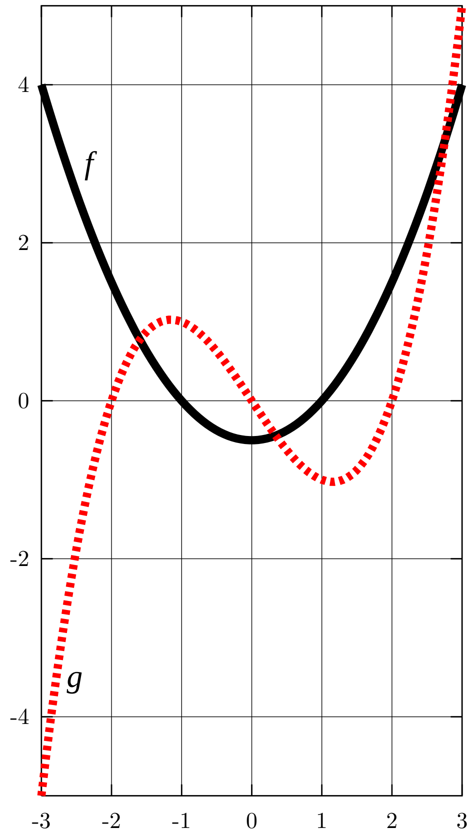
Ce système peut s'écrire comme $A^{-1}\mathbf{x} = b$. Donc $\mathbf{x} = Ab$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 \\ -12 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -16 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Question 4. *Soient $f : [-3,3] \to \mathbb{R}$ et $g : [-3,3] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dont les graphes sont dessinés ci-contre. Déterminez*

$$\{x \in [-3,3] : f(x)g(x) \leqslant 0\}.$$

Expliquez votre raisonnement.



Pour que $f(x)g(x) \leqslant 0$, il faut et il suffit que $f(x)$ et $g(x)$ soient de signes opposés, c'est-à-dire

- $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) \leqslant 0$ ou
- $f(x) \leqslant 0$ et $g(x) \geqslant 0$.

Cela se produit pour

- $-3 \leqslant x \leqslant -2$ où $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) \leqslant 0$.
- $-1 \leqslant x \leqslant 0$ où $f(x) \leqslant 0$ et $g(x) \geqslant 0$.
- $1 \leqslant x \leqslant 2$ où $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) \leqslant 0$.

L'ensemble demandé est donc $[-3,-2] \cup [-1,0] \cup [1,2]$.

Question 5. *Déterminez les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $x = 0$ vérifie l'inégalité*

$$ax^3 + 2a(x+1)^2 + a^2(x-1) \geqslant a(x+1)^3. \tag{1}$$

Justifiez votre démarche.

Le fait que l'inégalité (1) soit satisfaite pour $x = 0$ veut simplement dire que lorsqu'on remplace x par 0 dans (1), on obtient une inégalité vraie. Remplacer x par 0 donne $2a - a^2 \geqslant a$ c'est-à-dire $a - a^2 \geqslant 0$. Comme $a - a^2 = a(1-a)$, cette expression sera positive si et seulement si $a \geqslant 0$ et $1 - a \geqslant 0$ ou si $a \leqslant 0$ et $1 - a \leqslant 0$ (ce dernier cas est impossible). En conclusion :

$$(1) \text{ est vérifié pour } x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in [0,1].$$

Question 6. *Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ deux matrices inversibles. Montrez que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Montrons que $(B^{-1}A^{-1})(AB) = \mathbb{1}$. Par associativité, $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B$. Par la définition de A^{-1}, on obtient $B^{-1}\mathbb{1}B = B^{-1}B$ (car la matrice $\mathbb{1}$ est le neutre pour la multiplication matricielle). Par la définition de B^{-1}, on obtient $\mathbb{1}$. De même, on montre que $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \mathbb{1}$. Donc $B^{-1}A^{-1}$ satisfait la définition d'un inverse. Vu que l'inverse est unique, $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$.

Question 7. *Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Considérons deux fonctions $f :]a,b[\to]c,d[$ et $g :]c,d[\to]a,b[$ dont la dérivée existe en tous les points de leur domaine. Supposons que*

$$g \circ f = \mathbb{1}_{]a,b[}. \tag{2}$$

Montrez que, pour tout $x \in]a,b[$,

$$\partial g(f(x)) \neq 0 \qquad \textit{et} \qquad \partial f(x) = \frac{1}{\partial g(f(x))}.$$

L'égalité (2) signifie que

$$\forall x \in]a,b[, \quad g(f(x)) = x$$

En différentiant cette relation grâce à la règle des fonctions composées, on obtient

$$\forall x \in]a,b[, \quad \partial g(f(x))\,\partial f(x) = 1.$$

Cela implique que $\partial g(f(x)) \neq 0$ (sinon le produit vaudrait 0 et pas 1) et donc, en divisant les deux membres de l'égalité par $\partial g(f(x))$, on a

$$\forall x \in]a,b[, \quad \partial f(x) = \frac{1}{\partial g(f(x))}$$

ce qui est la relation demandée.

Question 7 (suite). *À partir du résultat ci-dessus, établissez la formule de dérivation de la fonction* $\arccos :]-1,1[\to]0,\pi[$ *à partir de celle pour* $\cos :]0,\pi[\to]-1,1[$.

Par définition, $\cos \circ \arccos = \mathbb{1}_{]-1,1[}$. Par le point précédent, on obtient

$$\partial_x \arccos x = \frac{1}{(\partial_t \cos t)\big|_{t=\arccos x}}.$$

Comme $\partial_t \cos t = -\sin t$ et que, pour $t \in]0,\pi[$, $\sin t \leqslant 0$, on peut écrire $\partial_t \cos t = -\sqrt{1-\cos^2 t}$. Donc, $\partial_x \arccos x = \frac{1}{(-\sqrt{1-\cos^2 t})\big|_{t=\arccos x}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Question 8. *Les relations suivantes définissent-elles des fonctions ? Justifiez en détail vos réponses (en particulier, donnez des contre-exemples* explicites*).*

- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto (w \textit{ tel que } w^2 = z)$

  Ce n'est pas une fonction. En effet, si on considère $z = 1$, les deux solutions $w = 1$ et $w = -1$ vérifient la relation $w^2 = z$ et seraient donc toutes deux images d'un même z en contradiction avec la définition de fonction.

- $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto (w \textit{ tel que } w^2 = z \textit{ et } \mathfrak{Re}\, w \geqslant 0)$

  Ce n'est pas une fonction car, à $z = -1$ correspondent $w = \boldsymbol{i}$ et $w = -\boldsymbol{i}$ qui vérifient toutes deux la relation $w^2 = z$ et $\mathfrak{Re}\, w \geqslant 0$.

- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (y \text{ tel que } y^2 - 1 = x^2 \text{ et } y > 0)$

  C'est une fonction. En effet, $y^2 - 1 = x^2$ peut se réécrire $y^2 = x^2 + 1$. Puisqu'on recherche $y > 0$, la seule solution possible est $y = \sqrt{x^2+1}$. Notons que cette solution existe et est > 0 pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc que $\operatorname{Dom} h = \mathbb{R}$.

- $k : \mathbb{R}^{4\times 4} \to \mathbb{R} : A \mapsto \operatorname{dét} A$

  C'est une fonction. En effet, étant donné une matrice A, son déterminant est univoquement défini- bien qu'il y ait plusieurs manières de le calculer. En fait, $\operatorname{dét}(a_{ij})_{i,j=1}^4$ est un polynôme en les variables a_{ij}.

Question 9. *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définie par*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Montrez, par récurrence, que pour tout $n \geqslant 2$,

$$\operatorname{dét} A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

La propriété est vraie pour $n = 2$ (cas de base). En effet, pour $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\operatorname{dét} A = a_{11}a_{22} - a_{21}\cdot 0 = a_{11}a_{22}$.

Supposons que la propriété vraie pour $n \leqslant i$ et montrons-la pour $n = i+1$, c'est-à-dire

$$\operatorname{dét} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,i} & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \dots & a_{i+1,i+1} \end{pmatrix} = a_{11}\cdots a_{i+1,i+1}$$

On a, en développant suivant la $(i+1)^{\text{e}}$ colonne (et en tenant compte que les i premiers termes sont nuls),

$$\begin{aligned} \operatorname{dét} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,i} & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \dots & a_{i+1,i+1} \end{pmatrix} &= (-1)^{(i+1)^2} a_{i+1,i+1} \operatorname{dét} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,i-1} & 0 \\ a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & \dots & a_{i,i} \end{pmatrix} \\ &= 1\, a_{i+1,i+1} a_{11}\cdots a_{ii} \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= a_{11}\cdots a_{ii} a_{i+1,i+1} \quad \text{(car la multiplication dans } \mathbb{R} \text{ est commutative).} \end{aligned}$$

Question 10. *Calculer* $\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=0}^{\ell}(i-j)$

Cette somme vaut $\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}(i-j)+\sum_{i=1}^{\ell} i$. Le premier terme est la somme de tous les éléments d'une matrice carrée $(\ell\times\ell)$ antisymétrique, il vaut donc 0. Le second terme vaut $\ell(\ell+1)/2$. Donc $\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=0}^{\ell}(i-j)=\ell(\ell+1)/2$.

Question 11. *Quels sont les complexes z qui vérifient*

$$|z^2|+|z|+1=0.$$

Puisque $|z^2|=|z|^2$ (règle sur l'exposant de $|\cdot|$), la question revient à déterminer les complexes z dont le module est solution de l'équation $X^2+X+1=0$. Cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car son $\Delta=-3$ est inférieurà 0. Puisque le module d'un complexe est un réel, il ne peut y avoir de complexes z dont le module $|z|$ est solution de cette équation. Donc $\{z : |z^2|+|z|+1=0\}=\varnothing$.

Question 12.

- *Prouver que* $\sqrt[6]{3}\notin\mathbb{Q}$*, sachant que* $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$*.*

  Si $\sqrt[6]{3}\in\mathbb{Q}$, alors il existe $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que $\sqrt[6]{3}=a/b$. Par conséquent, $\left(\sqrt[6]{3}\right)^3=a^3/b^3$, c'est-à-dire (règle des exposants) $\sqrt{3}=a^3/b^3$. Et donc, on aurait $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$ (car le cube d'un entier est un entier), ce qui contredit l'hypothèse « sachant que $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$ ».

- *Calculer* $|5\boldsymbol{i}+3|$ *et* $|(5\boldsymbol{i}+3)^2|$.

  Par définition de $|\cdot|$: $|5\boldsymbol{i}+3|=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$. La règle sur l'exposant de $|\cdot|$ donne :

$$|(5\boldsymbol{i}+3)^2|=|5\boldsymbol{i}+3|^2=(\sqrt{34})^2=34.$$

- *Mettre sous forme trigonométrique les complexes suivants :* $-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$ *et* $\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right)^{17}$.

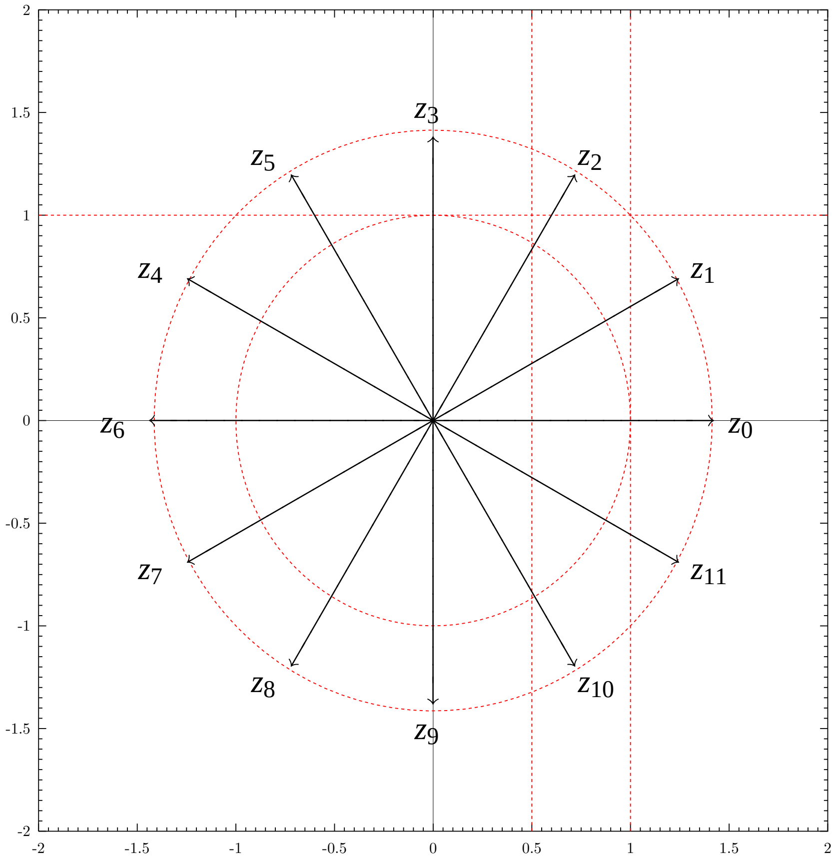
$$-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}=\sqrt{3}\cdot\underbrace{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right)}_{\text{complexe de module 1 d'argument } \frac{7\pi}{6}}=\sqrt{3}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{6}$$

  Par conséquent,

$$\begin{aligned}\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right)^{17}&=\left(\sqrt{3}\right)^{17}\left(\operatorname{cis}\frac{7\pi}{6}\right)^{17} \qquad \text{(règle sur les exposants)}\\&=3^8\sqrt{3}\operatorname{cis}\left(\frac{119\pi}{6}\right)=3^8\sqrt{3}\operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

Question 13. *Représentez* graphiquement *les solutions complexes de* $Z^{12} = 64$. *Votre dessin doit être explicite. Expliquez votre démarche (avant de faire le dessin ci-dessous).*

Les solutions de $z^{12} = 64$ sont de la forme uv avec u est une solution complexe de $z^{12} = 1$ (c'est-à-dire une racine douzième de l'unité) et v une solution particulière de $z^{12} = 64$. Prenons $\sqrt{2}$ (puisque $(\sqrt{2})^{12} = 64$). Les racines douzième de l'unité sont les complexes $\operatorname{cis}\frac{k\pi}{6}$ avec $k \in \{0, 1, \dots, 11\}$. Les solutions de $z^{12} = 64$ sont donc de la forme $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{k\pi}{6}$ avec $k \in \{0, 1, \dots, 11\}$ (il y en a 12). Le $\sin\frac{\pi}{6}$ vaut $\frac{1}{2}$ et le $\cos\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2}$, ce qui permet de trouver les solutions pour $k = 1$ et $k = 2$. En utilisant le fait que si u est une solution de $z^{12} = 64$ alors $-u$ et $\bar{u}$ sont aussi solution, on obtient par symétrie centrale et par symétrie d'axe réel les racines correspondant à $k = 7$ et 8 et $k = 4, 5, 10$ et 11. $\sqrt{2}$ est la longueur de la diagonale du carré de côté 1. Ceci permet de trouver sur le dessin $\sqrt{2}$ et donc $-\sqrt{2}$, ainsi que $\sqrt{2}\boldsymbol{i}$ et $-\sqrt{2}\boldsymbol{i}$ qui sont les quatre autre solutions.



Question 14. *Soit* $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *la fonction définie par*

$$L(x, y, z) = (2x + y, y - 3z, -2x - y + z, 5x).$$

(a) *Prouvez que L vérifie les propriétés suivantes :*

- $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \forall (x', y', z') \in \mathbb{R}^3,\quad L\big((x, y, z) + (x', y', z')\big) = L(x, y, z) + L(x', y', z')$
- $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\quad L\big(\lambda(x, y, z)\big) = \lambda L(x, y, z)$

Soit $(x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
L\big((x,y,z)+(x',y',z')\big) &= L(x+x',y+y',z+z') && \text{(par définition de}+_{\mathbb{R}^3}\text{)}\\
&= \big(2(x+x')+(y+y'),(y+y')-3(z+z'),\\
&\qquad -2(x+x')-(y+y')+(z+z'),5(x+x')\big) && \text{(par définition de } L\text{)}\\
&= \big(2x+2x',y+y',y+y'-3z-3z',\\
&\qquad -2x-2x'-y-y'+z+z',5x+5x'\big) && \text{(par distributivité dans } \mathbb{R}\text{)}\\
&= (2x+y+2x'+y',y-3z+y'-3z',\\
&\quad -2x-y+z-2x'-y'+z',5x+5x') && \text{(car } +_{\mathbb{R}} \text{ commutative)}\\
&= (2x+y,y-3z,-2x-y+z,5x)\\
&\qquad +(2x'+y',y'-3z',-2x'-y'+z',5x') && \text{(par définition de } +_{\mathbb{R}^4}\text{)}\\
&= L(x,y,z)+L(x',y',z')
\end{aligned}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
L\big(\lambda(x,y,z)\big) &= L(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\\
&= (2\lambda x+\lambda y,\lambda y-3\lambda z,-2\lambda x-\lambda y+\lambda z,5\lambda x) && \text{(par définition de } L\text{)}\\
&= \big(\lambda(2x+y),\lambda(y-3z),\lambda(-2x-y+z),\lambda 5x\big) && \text{(par mise en évidence)}\\
&= \lambda(2x+y,y-3z,-2x-y+z,5x)\\
&= \lambda L(x,y,z)
\end{aligned}$$

Question 14 (suite). *Posons $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$.*

(b) *Complétez pour que l'égalité suivante soit vérifiée pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:*

$$(x,y,z) = \underline{\quad x \quad}\, e_1 + \underline{\quad y \quad}\, e_2 + \underline{\quad z \quad}\, e_3 \tag{3}$$

(c) *Soit $v \in \mathbb{R}^4$. Prouvez que v est orthogonal à (tous les vecteurs de)* $\operatorname{Im} L$ *si et seulement si $v \perp L(e_i)$ pour $i=1,2,3$.* INDICATION : *Les points précédents peuvent vous être utiles !*

($\Rightarrow$) Supposons que v est orthogonal à $\operatorname{Im} L$. Montrons que $v \perp L(e_i)$ pour $i=1,2,3$. L'orthogonalité de v avec $\operatorname{Im} L$ signifie que $v \perp L(x,y,z)$ avec $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. En particulier,

- si $x=1$, $y=0$, $z=0$, on a $v \perp L(e_1)$.
- si $x=0$, $y=0$, $z=1$, on a $v \perp L(e_2)$.
- si $x=0$, $y=0$, $z=1$, on a $v \perp L(e_3)$.

Pour résumer, pour montrer ($\Rightarrow$), il suffit de remarquer que $L(e_i) \in \operatorname{Im} L$.

($\Leftarrow$) Supposons $v \perp L(e_i)$ où $i \in \{1,2,3\}$. Dès lors, on obtient :

$$\begin{aligned}
v \cdot L(x,y,z) &= v \cdot \big(L(xe_1+ye_2+ze_3)\big)\\
&= v \cdot \big(xL(e_1)+yL(e_2)+zL(e_3)\big) && \text{(grâce à (3))}\\
&= x\big(v \cdot L(e_1)\big)+y\big(v \cdot L(e_2)\big)+z\big(v \cdot L(e_3)\big) && \text{(bilinéarité du produit scalaire)}\\
&= 0
\end{aligned}$$